

Exponentiële groei met stochastische verstoring

Een vast bedrag op een spaarrekening met rente-op-rente groeit als $a_{n+1} = (1 + \alpha)a_n$, $n \in \mathbb{N}$, waar α de rente is en a_0 het beginbedrag. Een model in continue tijd voor exponentiële groei is $b(t) = e^{\alpha t}b_0$. De waarde van een aandelenpakket kan men op een vergelijkbare manier beschrijven. Door invloeden van buitenaf zal de pure exponentiële groei worden verstoord. We vervangen de rente α op moment n daarom door een stochastische variabele. Voor het gemak schrijven we deze als $\alpha + Z_n$, waar Z_n een kleine (min-of-meer) rond nul gecentreerde stochast is.

Bekijk de volgende twee modellen:

$$A_{n+1} = (1 + \alpha + U_n)A_n, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (1)$$

$$B_{n+1} = e^{\alpha + V_n}B_n, \quad (2)$$

waar $\alpha \in (-1, 1)$ en (U_n) en (V_n) zijn beide rijen van identiek verdeelde onafhankelijke toevalsvariabelen. Voor de verdelingen kan mijn bijvoorbeeld aannemen dat $U_n = \sigma$ of $-\sigma$ beide met kans $1/2$ of dat U_n Gaussisch verdeeld is met gemiddelde 0 en variantie σ . We willen weten hoe de stochastische verstoring doorwerkt op de verwachte waarden EA_n en EB_n .

We kunnen proberen EB_n te bepalen met samples. Bekijk bijvoorbeeld model (2) met V_n Gaussisch $(0, \sigma)$ verdeeld. Sample een groot aantal keren $B_1, \dots, B_n$ en vind de “beste” exponentiële kromme $t \mapsto e^{\beta t}$ door deze punten. Wat is β ? Is $\beta = \alpha$? Dit is een discrete versie van het beroemde Black-Scholes model. Wat gebeurt er met andere verdelingen van U_n ?

Ook kunnen we proberen het gedrag van de modellen (1) en (2) analytisch te bepalen. Ten slotte kunnen we een continue tijd model voor exponentiële groei met stochastische verstoring beschouwen.

Onno van Gaans
Bachelor Seminarium ASB
voorjaar 2009