

Vortex oplossingen en blowup.

Voor dit project bestuderen we ‘draaikolk’ oplossingen (vortex oplossingen). De vergelijking waarvoor deze oplossingen interessant zijn is de Ginzburg-Landau vergelijking. De Ginzburg-Landau vergelijking is een modelvergelijking voor verschillende problemen uit de natuurkunde, de biologie en de chemie. De vergelijking beschrijft bijvoorbeeld het gedrag van de lichtintensiteit van een gaslaser. De Ginzburg-Landau vergelijking wordt gegeven door

$$i\frac{\partial\Phi}{\partial t} + (1 - i\varepsilon)\Delta\Phi + (1 + ib\varepsilon)|\Phi|^{2\sigma}\Phi = 0, \quad (1)$$

waarbij $\sigma, \varepsilon, b > 0$ en $t > 0$. De zogenaamde amplitude Φ is een complexwaardige functie van de plaatsvariabele x en de tijd t . We kiezen $x \in \mathbf{R}^2$ zodat $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$ met $x = (x_1, x_2)$.

Voor $\varepsilon = 0$ wordt vergelijking (1) de niet-lineaire Schrödinger vergelijking genoemd. Voor de niet-lineaire Schrödinger vergelijking is al een start gemaakt met het bestuderen van de vortex oplossingen.

Wij zullen aannemen dat ε klein is, dan kan de Ginzburg-Landau vergelijking gezien worden als een kleine verstoring van de niet-lineaire Schrödinger vergelijking. De vraag is nu of de vortex oplossingen die gevonden zijn voor de niet-lineaire Schrödinger vergelijking blijven bestaan voor $0 < \varepsilon \ll 1$.

Als de vergelijking in poolcoördinaten r en θ geschreven wordt hebben de vortex oplossingen de vorm

$$\Phi = A(r, t)e^{im\theta}, \quad m \in \mathbf{Z}.$$

Voor $m = 0$ zijn er stationary oplossingen (onafhankelijk van de tijd) bekend waarbij A één pulse heeft (voor $r > 0$), zie figuur 1. Deze oplossingen worden ook wel ring-oplossingen genoemd vanwege de structuur die ze hebben in drie dimensies.

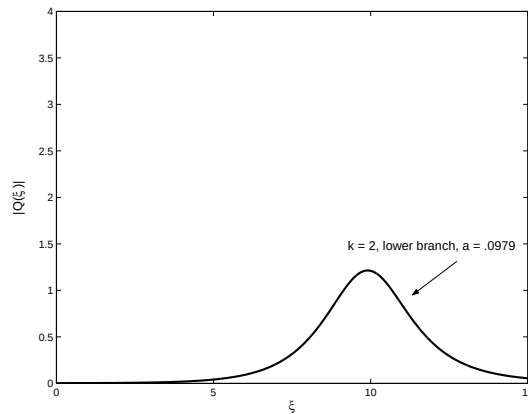


Figure 1: De stationaire oplossing met één pulse.

Een eerste stap in het bestuderen van de vortex oplossingen is om aan te nemen dat deze oplossingen de volgende structuur hebben

$$A(t, r) = R(r)e^{i\lambda t}$$

(met R stationair). Voor $\varepsilon = 0$ zijn er van het gedrag van R al diverse eigenschappen bekend, maar zelfs voor dat geval zijn er nog vele open vragen. Met behulp van asymptotische analyse is er voor $m \gg 1$ een pulse oplossing gevonden wanneer $r = \mathcal{O}(\frac{1}{m})$. Maar, een volledige asymptotische oplossing die geldig is voor alle $r > 0$ is nog niet bekend voor $\varepsilon = 0$ (eventueel ook iets om naar te kijken?)

Voor de Ginzburg-Landau vergelijking willen we graag weten wat de invloed is van ε en b is op dit soort oplossingen. Kunnen deze nog steeds geconstrueerd? Onder welke voorwaarden? Hoe zien ze eruit?

Ook oplossingen voor $m = \mathcal{O}(1)$ zijn erg interessant natuurlijk.

Zodra deze vortex oplossingen geconstrueerd zijn geeft dit ook direct het bestaan van andere oplossingen. Dit vanwege het feit dat er voor de Ginzburg-Landau vergelijking bepaalde transformaties bekend zijn waaronder de vergelijking invariant blijft, en dat geeft dus direct meer oplossingen. Het toepassen van deze transformaties op de vortex oplossingen leidt direct tot het bestaan van zogenaamde ‘blowup’ oplossingen. Blowup oplossingen zijn oplossingen die in eindige tijd oneindig worden ($|\Phi|$ gaat naar oneindig), met andere woorden opblazen. Blowup oplossingen worden in experimenten gevonden in lasers. Daarbij wordt de lichtintensiteit ‘oneindig’; deze wordt in ieder geval zo groot dat de Ginzburg-Landau vergelijking niet meer het correcte model is om te bestuderen.

Er is een directe relatie tussen dit project en mijn eigen onderzoek aangezien ik ook blowup oplossingen bestudeer voor de Ginzburg-Landau vergelijking en voor andere modellen. Maar, de vragen die gesteld worden in dit project zijn zeker nog niet bestudeerd en wel erg interessant om antwoord op te weten.

Vivi Rottschäfer
vivi@math.leidenuniv.nl
Bachelorproject voor seminarium AS&B
voorjaar 2008