Arch. Math., Vol. 53, 547–552 (1989) 0003-889X/89/5306-0547 $ 2.70/0

Über das Fortsetzen von Bewertungen in vollständigen Körpern

Von

H. W. Lenstra, Jr. und P. Stevenhagen

1. Einleitung. Nachdem Hensel [3, 1908] die p-adischen Zahlen eingeführt hatte, wurden die Grundlagen einer abstrakten Theorie bewerteter Körper von dem ungarischen Mathematiker Josef Kürschák in seiner Arbeit "Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie" [4, 1912] entwickelt. Dort wird der allgemeine Begriff einer Bewertung eingeführt, und zwar als Verallgemeinerung des gewöhnlichen Absolutbetrages auf dem Körper der reellen oder komplexen Zahlen. Kürschák beweist, daß jeder bewertete Körper durch 'Adjunktion idealer Limes' zu einem vollständigen Körper ergänzt werden kann. Er benutzt dazu die Cantorsche Fundamentalreihenmethode, das übliche Vervollständigungsverfahren für metrische Räume, das, unter Verwendung der Existenz eines reellen Zahlkörpers, die von Cantor erfundene Konstruktion des reellen Zahlkörpers aus dem rationalen nachahmt. Anschließend wird gezeigt, daß in jeder endlichen Erweiterung L eines vollständigen Körpers K eine Fortsetzung der Bewertung auf K zu einer Bewertung auf L existiert (Fortsetzungssatz). Es folgt hieraus unmittelbar, daß die Bewertung eines vollständigen Körpers K bis auf die algebraisch abgeschlossene Hülle von K fortgesetzt werden kann, eine Aussage, bei der Kürschák noch bemerkt, daß die von Steinitz [7, 1909] bewiesene Existenz einer algebraisch abgeschlossenen Hülle beliebiger Körper zwar 'auf dem vielfach umstrittenen Wohlordnungssatz des Herrn E. Zermelo' beruhe, dennoch von ihm für streng angenommen werde. Die Eindeutigkeit der Fortsetzungsbewertung wird nur bewiesen unter der Annahme, konjugierten Größen in der Erweiterung komme gleiche Bewertung zu. Erst Ostrowski [5, 1917] zeigt, daß diese Fortsetzungsbewertung auch die einzig mögliche ist.

In der Einleitung zu seiner Arbeit bemerkt Kürschák, der Beweis des Fortsetzungssatzes lasse sich für *nicht-archimedische* Bewertungen – das Wort geht auf Ostrowski zurück – leicht aus den Untersuchungen Hensels über die Zerlegung von Polynomen mit p-adischen Koeffizienten herleiten. Da aber nicht alle Bewertungen von dieser Beschaffenheit sind, werden Ergebnisse aus der Thèse Hadamards [2, 1892] über die Art der Singularitäten auf dem Konvergenzkreise komplexer Potenzreihen zu Hilfe genommen, die in geeigneter Verallgemeinerung hinreichend sind, um den allgemeinen Fortsetzungssatz zu beweisen. Kürschák bereut den erheblichen technischen Aufwand, den die Verwendung der Hadamardschen Sätze mit sich bringt, und schreibt, er ziehe es vor, bloß Hensels viel einfachere Untersuchungen über die Zerlegung der ganzen Funktionen in

$K(p)$ (der p-adische Zahlkörper) anzuwenden und glaube, daß die Sätze über die Bewertung der algebraischen Erweiterungen mittels solcher Methoden bewiesen werden können, die den Henselschen Überlegungen etwas näher stehen, als die von ihm benutzten. Er selbst habe aber vergebens nach einer größeren Annäherung gestrebt.

Die Verwendung der von Hadamard herrührenden Ergebnisse für die Fortsetzung archimedischer Bewertungen stellt sich tatsächlich als überflüssig heraus. Ostrowski [6, 1918] beweist nämlich, daß es bis auf topologische Isomorphismen nur zwei vollständige archimedische Körper gibt – den reellen und den komplexen Zahlkörper, mit einer Potenz des üblichen Absolutbetrages bewertet – so daß der Fortsetzungssatz in diesem Falle offensichtlich zutrifft. Bemerkenswert ist übrigens, daß alle uns bekannten Beweise des Ostrowskischen Satzes auf einem Sonderfall des Fortsetzungssatzes (für die Erweiterung $K \subset K(\sqrt{-1})$) beruhen, der dann ad hoc bewiesen wird. Wegen dieser geschichtlichen Vorgänge hat sich der Fortsetzungssatz einen Status als Folge der Henselschen Ergebnisse in Verbindung mit Ostrowski's Klassifizierung archimedischer Körper erworben, den er immer behalten hat.

Einen besonders schnellen und eleganten Beweis des Fortsetzungssatzes von der Hand des Herrn Geyer findet man in den Proceedings der Brightonschen Konferenz [1, II sec. 10, 1967]. Er ist nur gültig für *lokal kompakte* vollständige Körper, beruht aber auf völlig elementaren Argumenten topologischer Art.

In dieser Arbeit wird der Fortsetzungssatz ohne jegliche beschränkende Annahme mit elementaren Mitteln bewiesen. In dem Beweis, der also weder das Henselsche Lemma und seine Folgerungen noch die Ostrowskische Charakterisierung archimedischer Körper verwendet, spielt die archimedische oder nicht-archimedische Beschaffenheit der fortzusetzenden Bewertung überhaupt keine Rolle.

2. Beweis des Fortsetzungssatzes. Es sei ϕ eine Bewertung auf dem Körper K, d.h. eine Funktion $K \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$, für die gilt:

$$\phi(x) > 0 \text{ falls } x \neq 0;$$

$$\phi(xy) = \phi(x)\phi(y);$$

$$\text{es gibt } C \in \mathbb{R} \text{ derart, daß } \phi(1 + x) \leqq C \text{ falls } \phi(x) \leqq 1.$$

Wir werden annehmen, wenn nötig ϕ durch eine geeignete Potenz ersetzend, daß die Dreiecksungleichung für ϕ erfüllt ist, d.h. $\phi(x + y) \leqq \phi(x) + \phi(y)$ für alle $x, y \in K$. Es sei jetzt K vollständig in Bezug auf die Bewertung ϕ, und L eine endliche Körpererweiterung von K. Wir beweisen den folgenden Satz.

Fortsetzungssatz. *Es gibt genau eine Bewertung ψ auf L, für die $\psi|_K = \phi$, und diese Bewertung wird gegeben durch die Formel*

$$\psi(x) = \phi(N_{L/K}(x))^{1/[L:K]} \quad (x \in L).$$

Hier bezeichnet $N_{L/K}$ die Norm der Körpererweiterung L/K.

Beweis. Eine *Vektornorm* $|.|$ auf einem K-Vektorraum V ist eine Funktion $K \to \mathbb{R}_{\geqq 0}$, die außerhalb 0 positiv ist und für die $|x + y| \leqq |x| + |y|$ und $|kx| = \phi(k) \cdot |x|$ für $k \in K$ gilt. Als elementare Tatsachen setzen wir voraus, daß alle Vektornormen auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum über K die gleiche Topologie induzieren [1, S. 52], und daß zwei Fortsetzungen von ϕ auf L identisch sind, falls die von ihnen erzeugten Topologien gleich sind [1, S. 47]. Da jede Fortsetzung von ϕ auf L in einer geeigneten Potenz eine Vektornorm auf L (in Bezug auf dieselbe Potenz von ϕ) darstellt, folgt hieraus unmittelbar, daß es nicht mehr als eine Fortsetzung von ϕ auf L geben kann. Weiter folgt, daß eine solche Fortsetzung durch die Formel im Satz gegeben werden muß. Ist nämlich ψ die Fortsetzung von ϕ auf eine normale Erweiterung von K, die L enthält, und σ ein Automorphismus jener Erweiterung über K, so ist wegen der Eindeutigkeit $\psi(\sigma x) = \psi(x)$ für alle $x \in L$. Schreibt man jetzt $N_{L/K}(x) = \prod_{i=1}^{[L:K]} \sigma_i x$, dann folgt $\phi(N_{L/K}(x)) = \psi(\prod \sigma_i x) = \psi(x)^{[L:K]}$.

Aus der im Satz gegebenen Definition von ψ sieht man unmittelbar, daß $\psi(x) > 0$ falls $x \neq 0$, daß $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$ und daß $\psi|_K = \phi$. Zu zeigen ist nur, daß $\psi(1 + x)$ beschränkt bleibt falls $\psi(x) \leqq 1$. Hierzu wenden wir Induktion nach dem Erweiterungsgrad $n = [L:K]$ an.

Für $n = 1$ ist nichts zu beweisen. Nehmen wir also an, n sei größer als 1 und der Fortsetzungssatz treffe zu für Erweiterungen vom Grade $< n$. Ist nun L/K eine Erweiterung vom Grade n, so dürfen wir gleich voraussetzen, daß L eine primitive Erweiterung von K ist, sagen wir mit primitivem Element α. Es läßt sich dann jedes $x \in L$ eindeutig darstellen als $x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i$ mit $a_i \in K$. Wir fixieren jetzt eine Vektornorm $|.|$ auf L durch

$$\left|\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i\right| = \max_i \phi(a_i).$$

Wir werden zeigen, daß es $C_1, C_2 \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt, derart, daß für alle $x \in L$

$$(1) \qquad C_1 |x| \leqq \psi(x) \leqq C_2 |x|.$$

Hiermit ist der Beweis erbracht, da aus diesen Ungleichungen für $x \in L$ mit $\psi(x) \leqq 1$ folgt, daß

$$\psi(1 + x) \leqq C_2 |1 + x| \leqq C_2(1 + |x|) \leqq C_2(1 + C_1^{-1}\psi(x)) \leqq C_2(1 + C_1^{-1}),$$

so daß ψ tatsächlich eine Bewertung auf L ist.

Die obere Grenze in (1) erhält man unmittelbar aus den Definitionen. Bezeichnen wir nämlich mit P das homogene Polynom vom Grade n aus $K[X_0, X_1, \ldots, X_{n-1}]$, für das

$$N_{L/K}\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \alpha^i\right) = P(a_0, a_1, \ldots, a_{n-1})$$

gilt, so sieht man gleich, daß für C_2 die n-te Wurzel der Summe der ϕ-Werte der Koeffizienten des Polynoms P genommen werden kann.

Der Fortsetzungssatz ist jetzt also zurückgeführt worden auf die Existenz einer Konstanten C_1 in (1), oder, was damit äquivalent ist, die Existenz einer positiven unteren Schranke C_1 für ψ auf $S = \{x \in L : |x| = 1\}$. Für lokal kompakte, nicht diskrete K ist diese Existenz trivial, wie übrigens auch die Existenz einer oberen Schranke, da dann S kompakt ist.

Wir beweisen zuerst, daß es eine positive untere Schranke in (1) gibt für Elemente der Form $a + b\alpha$, mit a und b in K. Wäre dies nicht der Fall, so gäbe es eine Folge $(a_i + b_i\alpha)_i$ solcher Elemente, für die

$$N_{L/K}(a_i + b_i\alpha) \to 0 \quad \text{in } K$$

$$\max(\phi(a_i),\ \phi(b_i)) = 1 \quad \text{und } b_i \neq 0 \quad \text{für jedes } i.$$

Es sei $c_i = a_i/b_i$. Ist $\phi(b_i) = 1$ für unendlich viele i, so nimmt $\phi(N_{L/K}(c_i + \alpha))$ beliebig kleine positive Werte an. Ist dies nicht der Fall, so gibt es unendlich viele i mit $\phi(a_i) = 1$, und für solche i wird $\phi(N_{L/K}(1 + c_i^{-1}\alpha))$ beliebig klein. Wir definieren das Polynom F als das eindeutige Polynom, für das im ersten Fall $F(a) = N_{L/K}(a + \alpha)$ für alle $a \in K$, und im zweiten Fall $F(a) = N_{L/K}(1 + a\alpha)$ für alle $a \in K$. Es hat dann aber F eine Nullstelle in K wegen des folgenden Lemmas, das wir später beweisen werden.

Lemma. *Ist f ein Polynom in $K[X]$, und gibt es für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>0}$ ein Element $a \in K$ mit $\phi(f(a)) < \varepsilon$, so hat f eine Nullstelle in K.*

Wir folgern, daß $\alpha \in K$, was unmöglich ist, da wir vorausgesetzt haben, daß n größer als 1 ist. Dieser Widerspruch zeigt, daß $\psi(x) \geqq C_0|x|$ gilt für ein positives C_0 und alle $x \in L$ der Form $a + b\alpha$. Man bemerke, daß hieraus schon der Fortsetzungssatz für $n = 2$ folgt.

Hieraus ergibt sich leicht, daß es auch für Elemente der Form $x = \prod_{j=1}^{n-1}(a_j + b_j\alpha)$ mit beliebigen $a_j, b_j \in K$ eine positive untere Schranke in (1) gibt. Wegen der Dreiecksungleichung für ϕ gilt nämlich

$$\left|\prod_{j=1}^{n-1}(a_j + b_j\alpha)\right| \leqq 2^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}|a_j + b_j\alpha|,$$

und daher

$$\psi\left(\prod_{j=1}^{n-1}(a_j + b_j\alpha)\right) = \prod_{j=1}^{n-1}\psi(a_j + b_j\alpha) \geqq C_0^{n-1}\prod_{j=1}^{n-1}|a_j + b_j\alpha|$$
$$\geqq C_0^{n-1}2^{1-n}\left|\prod_{j=1}^{n-1}(a_j + b_j\alpha)\right|.$$

Wir behaupten, daß es jetzt eine positive untere Schranke in (1) für *alle* x in L gibt. Bestünde sie nämlich nicht, so gäbe es in $K[X]$ eine Folge nicht-konstanter Polynome $f_i = \sum_{j=0}^{n-1} a_{ij}X^j$ $(i = 1, 2, \ldots)$ derart, daß

$$(2) \qquad \begin{aligned} &\psi(f_i(\alpha)) \to 0 \\ &|f_i(\alpha)| = \max_{j=0,1,\ldots,n-1}\phi(a_{ij}) = 1 \quad (i = 1, 2, 3, \ldots). \end{aligned}$$

Wir haben schon gezeigt, daß es keine Folge völlig in $K[X]$ zerfallender Polynome f_i mit den Eigenschaften (2) geben kann. Um den allgemeinen Fall aus diesem Sonderfall herzuleiten, bilden wir innerhalb einer algebraisch abgeschlossenen Hülle von K für

$k = 1, 2, 3, \ldots$ den Zerfällungskörper M_k der Polynome $\{f_i\}_{i<k}$ über K. Da jeder Körper M_k aus K gebildet werden kann durch endlich viele sukzessive Erweiterungen vom Grade kleiner als n, läßt sich wegen der Induktionsvoraussetzung die Bewertung ϕ in eindeutiger Weise auf M_k fortsetzen und M_k ist vollständig in Bezug auf diese Erweiterungsbewertung. Da offensichtlich $M_k \subset M_{k+1}$ gilt, gibt es eine Fortsetzung von ϕ auf den Zerfällungskörper $\bigcup_k M_k$ sämtlicher Polynome f_i. Es sei M die Vervollständigung von $\bigcup_k M_k$ unter dieser Bewertung, und χ die induzierte Bewertung auf M. Ist das Minimalpolynom des primitiven Elementes α von L/K reduzibel über M, so läßt sich L in eine Erweiterung vom Grade $< n$ des Körpers M einbetten. Die Bewertung χ hat wieder wegen der Induktionsvoraussetzung eine Fortsetzung auf diese Erweiterung, und seine Beschränkung auf L ist eine Fortsetzungsbewertung von ϕ auf L, also gleich ψ. Es kann dann aber überhaupt keine Folge von Polynomen mit den Eigenschaften (2) geben, da für eine Fortsetzungsbewertung ψ von ϕ auf L notwendigerweise (1) gilt: Widerspruch. Ist obiges Minimalpolynom irreduzibel in $M[X]$, so ist $L \otimes_K M$ eine Körpererweiterung von M vom Grade n mit primitivem Element α. In diesem Fall ist (f_i) eine Folge völlig zerfallender Polynome in $M[X]$, die die Eigenschaften (2) mit χ statt ϕ besitzt: Widerspruch.

Dies beschließt den Beweis des Fortsetzungssatzes.

Beweis des Lemmas. Wir dürfen offensichtlich annehmen, f sei vom Grade $n \geqq 1$. Wegen der Voraussetzung gibt es eine Folge $(x_i)_{i=0}^{\infty}$ in K mit $\lim f(x_i) = 0$. Wir werden einen Häufungspunkt dieser Folge konstruieren. Es folgt dann gleich aus der Stetigkeit der Funktion f auf K daß dies eine Nullstelle von f ist, und das Lemma ist bewiesen.

Wir zeigen zuerst, daß die Folge (x_i) die folgende Eigenschaft besitzt:

(3) *für jedes $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ gibt es eine ganze Zahl $k = k(\delta) \geqq 0$ derart, daß unter $n + 1$ beliebigen ganzen Zahlen $\geqq k$ immer zwei sind, sagen wir i und j, für die $|x_i - x_j| < \delta$.*

Hierzu setzen wir $\varepsilon = |a|\,\delta^n/(n+1)$, wobei a der höchste Koeffizient von f ist, und wählen ein $k > 0$ so, daß $|f(x_i)| < \varepsilon$ falls $i \geqq k$. Wir wollen jetzt für $n + 1$ beliebige Elemente $y_0, y_1, \ldots, y_n$ der Folge $(x_i)_{i \geqq k}$ zeigen, daß die reelle Zahl $\mu = \min\{|y_i - y_j| : 0 \leqq i < j \leqq n\}$ kleiner ist als δ. Wir dürfen voraussetzen, daß $\mu \neq 0$, sodaß die Elemente y_i unterschiedlich sind. Man hat dann wegen der Lagrangeschen Interpolationsformel

$$f = \sum_{i=0}^{n} f(y_i) \prod_{j \neq i} \frac{X - y_j}{y_i - y_j}.$$

Vergleich der höchsten Koeffizienten ergibt

$$a = \sum_{i=0}^{n} f(y_i) \prod_{j \neq i} (y_i - y_j)^{-1},$$

und demzufolge

$$|a| < (n+1) \cdot \varepsilon \cdot \mu^{-n} = |a|\,(\delta/\mu)^n.$$

Es ist also $\mu < \delta$, womit (3) bewiesen ist.

Aus (3) folgt leicht folgende präzisere Aussage: *für jedes* $\delta \in \mathbb{R}_{>0}$ *gibt es eine ganze Zahl* $k = k(\delta) \geqq 0$ *und* n *Elemente* $z_1, \ldots, z_n$ *der Folge* $(x_i)_{i \geqq k}$ *derart, daß*

$$\{x_i\}_{i \geqq k} \subset \bigcup_{j=1}^{n} \{x \in K : |x - z_j| < \delta\}.$$

Man wählt nämlich $k = k(\delta)$ wie in (3), setzt $z_1 = x_k$ and definiert die anderen z_j auf die folgende induktive Weise. Es sei z_{j+1} ein beliebiges Element der Menge

$$\{x_i\}_{i \geqq k} \setminus \bigcup_{i=1}^{j} \{x \in K : |x - z_i| < \delta\}$$

falls diese nicht leer ist, und $z_{j+1} = z_j$ anderenfalls. Die gewünschte Inklusion gilt nun, da es sonst ein Element z der Folge $(x_i)_{i \geqq k}$ gäbe, für die die $n + 1$ Elemente $z, z_1, \ldots, z_n$ paarweise einen Abstand $\geqq \delta$ hätten, im Widerspruch zu (3).

Die letzte Aussage gibt ein einfaches Konstruktionsverfahren für eine konvergente Teilfolge von $(x_i)_{i=0}^{\infty}$. Man wendet sie nämlich wiederholt an für $\delta = \delta_m = 2^{-m}$, $m = 1, 2, \ldots$, und wählt stets ein Element w_m unter $z_1, \ldots, z_n$ derart, daß $\{x \in K : |x - w_{m-1}| < \delta_{m-1}\} \cap \{x \in K : |x - w_m| < \delta_m\}$ unendlich viele Elemente der Folge $(x_i)_i$ enthält. Die Folge $(w_m)_m$ ist offensichtlich eine Cauchyfolge. Wegen der Vollständigkeit des Körpers K hat sie einen Grenzwert in K, und der ist ein Häufungspunkt der Folge $(x_i)_i$. Dies beschließt den Beweis des Lemmas.

Literaturverzeichnis

[1] J. W. S. CASSELS and A. FRÖHLICH (eds.), Algebraic number theory. New York-London 1967 (reprint 1986).
[2] J. HADAMARD, Essai sur l'étude des fonctions données par leur développement de Taylor. J. Math. Pures Appl. (4) **8** (1892).
[3] K. HENSEL, Theorie der algebraischen Zahlen. Band 1. Leipzig 1908.
[4] J. KÜRSCHÁK, Über Limesbildung und allgemeine Körpertheorie. J. Reine Angew. Math. **142,** 211–253 (1912).
[5] A. OSTROWSKI, Über sogenannte perfekte Körper. J. Reine Angew. Math. **147,** 191–204 (1917).
[6] A. OSTROWSKI, Über einige Lösungen der Funktionalgleichung $\phi(x) \cdot \phi(y) = \phi(xy)$. Acta Math. **41,** 271–284 (1918).
[7] E. STEINITZ, Algebraische Theorie der Körper. J. Reine Angew. Math. **137,** 167–309 (1909).

Eingegangen am 27. 5. 1988

Anschrift der Autoren:

H. W. Lenstra, Jr. and P. Stevenhagen
Department of Mathematics
University of California
Berkeley, CA 94720