Numerieke aspecten van de vergelijking van Cantor

Opgedragen aan Th. J. Dekker

H. W. Lenstra, Jr.

Uit de lineaire algebra is bekend dat het aantal oplossingen van een systeem lineaire vergelijkingen gelijk is aan nul, één, of oneindig, en het geval dat er precies één oplossing is merkt men algemeen als het plezierigste aan. Eenduidigheid en existentie van oplossingen spelen ook in andere gebieden van de wiskunde een belangrijke rol. Wanneer we de vergelijking

$$2^x = x$$

vanuit dit oogpunt beschouwen dan lijkt het op het eerste gezicht slecht gesteld te zijn met de eenduidige oplosbaarheid. Cantor toonde aan dat de vergelijking geen oplossing heeft in het gebied der *cardinaalgetallen*, en het is niet lastig in te zien dat hetzelfde geldt voor de *reële getallen*. Stappen we daarentegen over op de *ordinaalgetallen* of de *complexe getallen* dan vinden we oneindig veel oplossingen. In dit artikel zullen we onze aandacht richten op de *factoriële getallen*, die de eenduidige oplosbaarheid herstellen.

Factoriële getallen hebben nog geen algemene ingang en erkenning gevonden, en een beknopte inleiding is dan ook op zijn plaats. We roepen in herinnering dat ieder positief geheel getal n op eenduidige wijze geschreven kan worden als

$$n = c_k \cdot k! + c_{k-1} \cdot (k-1)! + \ldots + c_2 \cdot 2! + c_1 \cdot 1!,$$

waar ieder "cijfer" c_i tot de verzameling $\{0, 1, \ldots, i\}$ behoort, en $c_k \neq 0$. In het *factoriële talstelsel* schrijft men dan

$$n = (c_k c_{k-1} \ldots c_2 c_1)_!.$$

Het uitroepteken dient ter onderscheiding van het tientallig stelsel. Men heeft bijvoorbeeld $5 = (21)_!$ en $25 = (1001)_!$. We zullen tevens schrijven $0 = (0)_!$.

De lezer die enige rekenkundige ervaring met dit talstelsel wil opdoen wordt uitgenodigd na te gaan dat de rij getallen

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = 4, \quad a_4 = 16, \quad a_5 = 65536, \quad \ldots$$

gedefinieerd door

$$a_0 = 0, \qquad a_{i+1} = 2^{a_i}$$

er in het factoriële talstelsel aldus uitziet:

$$
\begin{aligned}
a_0 &= (0)_!, \quad a_1 = (1)_!, \quad a_2 = (10)_!,\\
a_3 &= (20)_!, \quad a_4 = (220)_!, \quad a_5 = (15000220)_!,\\
a_6 &= (\ldots 898{}^{1}_{6}4{}^{1}_{7}80{}^{1}_{1}9562{}^{1}_{0}7345000220)_!,\\
a_7 &= (\ldots 2171{}^{1}_{2}5099{}^{1}_{1}21727345000220)_!,\\
a_8 &= (\ldots 7197{}^{1}_{1}{}^{1}_{4}{}^{1}_{2}8{}^{1}_{5}5{}^{1}_{2}1727345000220)_!,\\
a_9 &= (\ldots {}^{1}_{8}9{}^{2}_{2}{}^{2}_{1}8{}^{1}_{2}84{}^{1}_{5}5{}^{1}_{2}1727345000220)_!,\\
a_{10} &= (\ldots {}^{1}_{6}{}^{1}_{3}{}^{1}_{2}{}^{1}_{6}{}^{1}_{0}{}^{1}_{9}1{}^{1}_{6}{}^{1}_{5}5{}^{1}_{2}1727345000220)_!,\\
a_{11} &= (\ldots 5{}^{1}_{0}{}^{2}_{0}93{}^{1}_{9}1{}^{1}_{6}{}^{1}_{5}5{}^{1}_{2}1727345000220)_!,\\
a_i &= (\ldots {}^{1}_{3}{}^{1}_{8}{}^{2}_{0}93{}^{1}_{9}1{}^{1}_{6}{}^{1}_{5}5{}^{1}_{2}1727345000220)_! \qquad (i \geq 12).
\end{aligned}
$$

Om plaats te besparen geven we niet meer dan 24 cijfers per term. Het elfde cijfer van a_6, dat gelijk is aan 10, hebben we als ${}^{1}_{0}$ geschreven, om duidelijk te maken dat het om een enkel cijfer gaat. Merk op dat we met de aanduiding "het elfde cijfer" beginnen te tellen *van rechts*. Evenzo zullen we beneden met "begincijfers" steeds de eerste cijfers van rechts af bedoelen.

Het is opmerkelijk dat de bovenstaande rij getallen, in een precisie van 24 cijfers opgeschreven, van de twaalfde term af constant is. In feite is de rij, in *iedere* eindige precisie opgeschreven, van een zekere term af constant. Men zou dus van een "limiet" kunnen spreken, die uit hoofde van de definitie van de rij een oplossing van de vergelijking $2^x = x$ moet zijn. Deze limiet zal dan oneindig veel cijfers hebben. Dit voert tot de invoering van *factoriële getallen*.

Men verkrijgt een factorieel getal door een rij cijfers te nemen die oneindig ver naar links doorloopt:

$$(\ldots c_5 c_4 c_3 c_2 c_1)_!.$$

Hier eisen we nog steeds dat $c_i \in \{0, 1, \ldots, i\}$ voor elke i. Een voorbeeld is het getal

$$\log 2 = (\ldots {}^{1}_{7}6{}^{2}_{2}72{}^{1}_{9}9{}^{1}_{1}{}^{1}_{2}569711375220000)_!,$$

waarvan de definitie beneden gegeven zal worden.

Elk positief geheel getal $n = (c_k c_{k-1} \ldots c_2 c_1)_!$ is een factorieel getal, met $c_i = 0$ voor $i > k$. Ook 0 is een factorieel getal, met *alle* cijfers gelijk aan 0. *Negatieve* gehele getallen kan men eveneens als factoriële getallen opvatten, bijvoorbeeld

$$-1 = (\ldots {}^{2}_{4}{}^{2}_{3}{}^{2}_{2}{}^{2}_{1}{}^{2}_{0}{}^{1}_{9}{}^{1}_{8}{}^{1}_{7}{}^{1}_{6}{}^{1}_{5}{}^{1}_{4}{}^{1}_{3}{}^{1}_{2}{}^{1}_{1}{}^{1}_{0}987654321)_!,$$

met $c_i = i$ voor alle i. Negatieve gehele getallen zijn erdoor gekenmerkt dat $c_i = i$ voor bijna alle i.

Factoriële getallen kan men onderwerpen aan de gebruikelijke rekenkundige bewerkingen. Het optellen van twee factoriële getallen geschiedt cijfer voor cijfer, van rechts naar links; als de som van de $i$de cijfers groter dan i is, dan verlaagt men die som met $i + 1$ en telt 1 op bij de som van de $i + 1$ste cijfers ("1 onthouden"). Op deze wijze vindt men bijvoorbeeld dat $1 + (-1) = 0$. Aftrekken gaat op een vergelijkbare manier. Voor vermenigvuldiging bestaat er een wat ingewikkelder *Horner*-achtig schema, maar het is vaak handiger om de volgende regel toe te passen: voor elke k hangen de k begincijfers van het product van twee factoriële getallen s en t alleen van de k begincijfers van s en t af. (Deze regel geldt ook voor sommen en verschillen.) Met behulp hiervan kan men het berekenen van een product herleiden tot het geval van positieve gehele getallen.

De *delingsoperatie*—numerici altijd een doorn in het oog—is niet altijd mogelijk: niet voor alle paren factoriële getallen s, t heeft de vergelijking $sx = t$ een oplossing, en een eventuele oplossing hoeft niet uniek te zijn; dit geldt zelfs als men zich beperkt tot het geval $s \neq 0$. *Als* evenwel de vergelijking $sx = t$ een unieke oplossing heeft, dan geven we deze aan met $\frac{t}{s}$. Dit is onder andere het geval wanneer een *inverse* van s bestaat, d.w.z. een factorieel getal dat met s product 1 heeft.

De machtsverheffing is als volgt gedefinieerd. Laten s en t factoriële getallen zijn, en kies een stijgende rij positieve gehele getallen n_1, n_2, n_3, $\ldots$ die steeds meer begincijfers met t gemeen hebben, zodat we kunnen zeggen dat n_i als factorieel getal naar t convergeert en als reëel getal naar oneindig. Dan kan men bewijzen dat de gewone machten s^{n_1}, s^{n_2}, s^{n_3}, $\ldots$, die door herhaalde vermenigvuldiging gedefinieerd zijn, steeds meer begincijfers gemeen krijgen, zodat we s^t als hun "limiet" kunnen definiëren.

Enige zorgvuldigheid is bij de machtsverheffing wel geboden, want hoewel de gebruikelijke regels $s^{tu} = (s^t)^u$, $s^{t+u} = s^t s^u$, $(st)^u = s^u t^u$ inderdaad gelden, is dit niet zo voor de regels $s^0 = 1$ en $s^1 = s$. Men heeft bijvoorbeeld

$$2^0 = (\ldots {}^{2}_{0}\,{}^{1}_{6}\,9\,2\,{}^{1}_{6}\,3\,{}^{1}_{3}\,1\,8\,6\,{}^{1}_{1}\,9\,9\,9\,8\,3\,7\,0\,5\,4\,0\,2\,2\,0)_!.$$

Wel is s^0 gelijk aan zijn eigen kwadraat, en heeft men $s^1 = s \cdot s^0$; in het algemeen is voor een geheel getal $n \geq 0$ het factoriële getal s^n—in zijn nieuwe definitie—gelijk aan s^0 vermenigvuldigd met het product van n factoren s.

Ofschoon voor eindige x de nieuwe waarde van 2^x niet met de oude samenvalt bestaat er een nauwe relatie. Dit blijkt als men de rij factoriële getallen b_0, b_1, b_2, $\ldots$ gedefinieerd door

$$b_0 = 0, \qquad b_{i+1} = 2^{b_i}$$

(maar nu met de nieuwe machtsverheffing!) vergelijkt met de rij a_0, a_1, a_2, … die we boven zagen:

$$
\begin{aligned}
b_0 &= (\ldots 000000000000000000000000)_!,\\
b_1 &= (\ldots {}^{2}0{}^{1}692{}^{1}63{}^{1}3186{}^{1}19998370540220)_!,\\
b_2 &= (\ldots 4{}^{1}7{}^{1}399{}^{1}203{}^{1}3515058565000220)_!,\\
b_3 &= (\ldots {}^{1}07{}^{1}62{}^{2}06{}^{1}8{}^{1}386{}^{1}4{}^{1}2593675000220)_!,\\
b_4 &= (\ldots {}^{2}4{}^{2}1{}^{2}11{}^{1}61187{}^{1}2{}^{1}3{}^{1}0{}^{1}167345000220)_!,\\
b_5 &= (\ldots 5{}^{1}0916{}^{1}0{}^{1}82407172 7345000220)_!,\\
b_6 &= (\ldots 6{}^{2}3{}^{2}15{}^{1}9{}^{1}040{}^{1}55{}^{1}21727345000220)_!,\\
b_7 &= (\ldots {}^{2}312{}^{1}1{}^{1}35{}^{1}4{}^{1}0{}^{1}55{}^{1}21727345000220)_!,\\
b_8 &= (\ldots {}^{1}9851{}^{1}7{}^{1}91{}^{1}6{}^{1}55{}^{1}21727345000220)_!,\\
b_9 &= (\ldots {}^{2}22{}^{2}093{}^{1}91{}^{1}6{}^{1}55{}^{1}21727345000220)_!,\\
b_i &= (\ldots {}^{1}3{}^{1}8{}^{2}093{}^{1}91{}^{1}6{}^{1}55{}^{1}21727345000220)_! \qquad (i \geq 10).
\end{aligned}
$$

Beide rijen hebben dezelfde limiet, en ook de convergentiesnelheid is in essentie dezelfde: het aantal “correcte” begincijfers van b_i is voor $3 \leq i < 10$ gelijk is aan dat van a_{i+2}, en waarschijnlijk ook voor grotere i.

De limiet van de rij is een factoriële oplossing van de vergelijking $2^x = x$ van Cantor. Men kan aantonen dat deze oplossing *uniek* is.

Hoe kan men een gegeven aantal begincijfers van de oplossing van de vergelijking van Cantor bepalen? De iteratie $x \to 2^x$ leidt, onafhankelijk van de startwaarde, tot het doel, maar voor de meeste startwaarden niet bijster snel. Voor de startwaarde 0 vinden we de b_i, en men kan bewijzen dat iedere iteratiestap in dat geval *gemiddeld* twee extra correcte cijfers geeft; preciezer: als $m \geq 9$, dan is de eerste k waarvoor b_k ten minste $m-1$ correcte begincijfers heeft gelijk aan $(m - s_3(m))/2$, waar $s_3(m)$ de som van de cijfers van m in het drietallig stelsel aangeeft (merk op dat $s_3(m) = O(\log m)$). Alleen voor heel speciale startwaarden, zoals de gezochte oplossing zelf, is de convergentie wezenlijk sneller.

Men kan zich afvragen of een Newton-iteratie efficiënter is. Deze zou volgens de klassieke formule gegeven worden door

$$x \to x - \frac{2^x - x}{(\log 2) \cdot 2^x - 1}.$$

Is de deling hier mogelijk? En wat is $\log 2$? Om met de laatste vraag te beginnen: uit de reële analyse is bekend dat $\log 2$ de waarde van de afgeleide van 2^x in $x = 0$ is, zodat men de reële logaritme van 2 kan vinden uit

$$\log 2 = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{2^{\epsilon} - 2^0}{\epsilon}.$$

Voor de factoriële logaritme vervangen we de naar 0 convergerende ϵ door de rij 1!, 2!, 3!, ..., die in de factoriële getallen naar 0 convergeert en in de reële getallen naar oneindig. Dit leidt tot de definitie

$$\log 2 = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n!} - 2^0}{n!}.$$

Men kan aantonen dat het quotiënt op eenduidige wijze gevormd kan worden, en dat de limiet als factorieel getal bestaat. De 24 begincijfers van $\log 2$ hebben we boven gegeven. Het blijkt dat voor ieder factorieel getal x het getal $(\log 2)2^x - 1$ een inverse bezit, zodat de deling in de formule van Newton eenduidig mogelijk is.

De Newton-iteratie met als startwaarde $x_0 = 0$ geeft

$$\begin{aligned}
x_0 &= (\ldots 000000000000000000000000)_!, \\
x_1 &= (\ldots 9\,{}^1_8\,6\,{}^1_5\,{}^2_0\,09\,{}^1_5\,19474\,{}^1_0\,4866100220)_!, \\
x_2 &= (\ldots {}^1_3\,{}^2_3\,{}^1_0\,3\,{}^1_9\,{}^1_9\,1\,{}^1_6\,{}^1_5\,5\,{}^1_2\,1727345000220)_!, \\
x_i &= (\ldots {}^1_3\,{}^1_8\,{}^2_0\,93\,{}^1_9\,1\,{}^1_6\,{}^1_5\,5\,{}^1_2\,1727345000220)_! \qquad (i \geq 3).
\end{aligned}$$

De limiet ziet er correct uit, en het heeft er alle schijn van dat de convergentie veel sneller is dan tevoren!

Het is een interessante vraag de precieze convergentiesnelheid van de Newton-iteratie te bepalen. Wellicht vereist een oplossing van dit probleem een inzicht in de zin van het menselijk streven dat een geëmeriteerd numeriek wiskundige ongetwijfeld verworven heeft.

Augustus 1992

Department of Mathematics, University of California, Berkeley, CA 94720, U. S. A.

This paper has appeared in:
P. van Emde Boas et al. (eds), *"Is er nog nieuws?" aangeboden aan Prof. Dr Th. J. Dekker*, Amsterdam, 1992.