Wiskunde en Onbegrip[1]

H.W. Lenstra, Jr.
Department of Mathematics # 3840
University of California
Berkeley, CA 94720–3840, U.S.A.
email: hwl@math.berkeley.edu

Ook mijzelf, naast veel verblijden,
viel veel onbegrip ten deel,
veel miskenning, lichaamslijden,
klappen in mijn financieel.
(Vrij naar Cornelis Paradijs)

Deze voordracht, die zich richt tot een algemeen publiek, houdt zich bezig met het eigen onbegrip dat de professionele wiskundige ten deel valt, de middelen waarmee deze het bestrijdt, en het verblijden dat hem bevangt als hij hiermee succes heeft.

Geachte aanwezigen.

Ik voel mij zeer gevleid door de vriendelijke woorden die professor Van der Put zojuist over mij gesproken heeft. Ik heb meer tijd van spreken dan hij, en misschien slaag ik erin het beeld dat hij geschetst heeft weer enigszins recht te trekken.

Het is een grote eer voor mij deze vierde Bernoulli-lezing te mogen houden. U heeft vandaag verscheidene malen gehoord dat Bernoulli driehonderd jaar geleden naar Groningen kwam, en in alle bescheidenheid wil ik opmerken dat ik zelf veertig jaar geleden naar deze mooie stad verhuisde. Bernoulli heeft het hier tien jaar uitgehouden, ik ben zelf tot negen gekomen. Het grootste deel van mijn jeugd heb ik in Groningen doorgebracht, en ik ken hier de weg veel beter dan in Berkeley of San Francisco, waar ik nu al weer acht jaar woon. Ik ben daar eigenlijk nog altijd een vreemdeling, net zoals Bernoulli in Groningen was.

[1] Text of the 1994–1995 Johann Bernoulli Lecture given at the 31st Dutch Mathematical Conference, Groningen, April 20 and 21, 1995. The Johann Bernoulli Foundation for Mathematics, founded in Groningen in 1988 to promote mathematics, organizes each year a Johann Bernoulli Lecture for which it invites prominent scientists. Johann Bernoulli was Professor of Mathematics at the University of Groningen from 1695–1705.

De Bernoulli-lezingen hebben ten doel een algemeen publiek te interesseren in een wiskundig getint onderwerp. Ik wil U dan ook verzoeken om vanavond te pretenderen dat U een algemeen publiek vormt, en dat U in het bijzonder niets van wiskunde weet. Ik zal van mijn kant dan óók proberen te doen of U niets van wiskunde weet, en U niet recht in de ogen gaan schijnen met wat ik de schoonheden van mijn vakgebied noem, maar waar U het mooie niet van inziet.

Dames en heren, ik moet toegeven dat ik lange tijd niet wist wat ik van deze voordracht moest denken. Ik heb nog nooit voor een algemeen publiek gesproken. Men heeft geen enkele moeite gespaard om de indruk te creëren dat het hier om een bijzonder belangrijke gebeurtenis gaat, die nog het best te vergelijken is met een *oratie*. Dit werd er gisteravond niet beter op toen ik deze zaal in ogenschouw kwam nemen—de verantwoordelijke functionaris wees erop dat deze kansel alleen gebruikt mag worden voor officiële academische plechtigheden, maar dat men in mijn geval een oogje zou dichtknijpen. Ik ben blij dat men ook voor de eerdere sprekers vanavond een oogje heeft dichtgeknepen.

Welnu, ik ga geen oratie houden. Wie een oratie houdt, zit ingeklemd tussen academische tradities, hij gaat vertellen wat hij wil gaan doen, en waarom dat zo belangrijk is. Ik sta hier niet om wat ik van plan ben, ik sta hier om wat ik al gedaan heb, en professor Van der Put heeft al uitgelegd waarom dat zo belangrijk is. Ik heb dan ook mijn toga thuisgelaten, en zal een wat luchtiger toon aanslaan. Ik ga weinig over wiskunde praten, maar meer over hoe een wiskundige van binnen in elkaar zit—over wat hem gaande houdt, en over de illusies die hem in staat stellen zijn werk te doen.

De titel van mijn lezing luidt "Wiskunde en onbegrip", en ik zou mijzelf verloochenen als ik niet zou beginnen met een nadere omschrijving van de begrippen die in deze titel voorkomen. Als ik over "wiskunde" spreek, bedoel ik *zuivere* wiskunde—wiskunde die ontwikkeld wordt op grond van de interne logica van het onderwerp van bestudering, en niet op grond van verondersteld nut. Of veel van wat ik zal zeggen ruimere geldigheid bezit, laat ik in het midden.

Wat ik met "onbegrip" bedoel, is minder eenvoudig uit te leggen, en de centrale plaats die onbegrip in mijn voordracht inneemt, vereist dat ik hier enige tijd bij stilsta.

Het gebeurde mij onlangs dat ik niet tevreden was met *wijsheid.* Ik was namelijk bezig met het vertalen van een gedicht van Archimedes, en het woord "wijsheid", dat uit twee lange lettergrepen bestaat, voldeed niet aan de eisen van het metrum. Ten einde een bruikbaar substituut te vinden moest ik mij verdiepen in het *wezen* van de wijsheid. Via de gebruikelijke handboeken ontdekte ik dat wijsheid gelijk is aan "kennis gepaard aan inzicht". Nu zijn "kennis" en "inzicht" misschien wel metrisch equivalent, maar verder zijn er weinig overeenkomsten.

"Kennis" is een begrip waar men goed mee uit de voeten kan. Het is te verwerven op betrekkelijk mechanische wijze, waarmee niet gezegd is dat dat gemakkelijk is (zeker niet als men inzicht ontbeert). Zelfs computers kunnen kennis verwerven. Bovendien is het aanwezig zijn van kennis eenvoudig te testen.

Met "inzicht" liggen de zaken veel ingewikkelder. Het is een ongrijpbaar begrip, zoals iedereen weet die wel eens aan een Engelssprekende de verschillen tussen 'horen', 'verstaan' en 'begrijpen' heeft proberen uit te leggen. Aanwezigheid van inzicht laat zich bovendien slechts op indirecte wijze testen. Ongetwijfeld zijn er filosofen die op grond van deze omstandigheden betogen dat inzicht helemaal niet bestaat. In ieder geval kan men zich moeilijk voorstellen hoe inzicht op mechanische wijze te verwerven zou zijn, en de deconfiture van de kunstmatige intelligentie suggereert dat dat helemaal niet kan.

Inzicht is een subjectief begrip: als twee mensen beiden zeggen dat ze iets begrijpen, is het zeer wel mogelijk dat ze iets heel anders bedoelen. Als een student zegt dat hij een bepaalde theorie begrijpt, blijkt het tegendeel vaak maar al te snel. Dit is een speciaal geval van een algemene waarheid, die enigszins paradoxaal klinkt: hoe groter een wiskundige is, des te kleiner is het inzicht waarover hij zegt te beschikken. Met andere woorden, met het begrip neemt ook het besef van onbegrip toe. De bekwaamheid om in een ogenschijnlijk geheel bevredigende theorie punten te ontdekken die bij nadere beschouwing om een aanvullende verklaring vragen, is het ware kenmerk van de expert.

Zonder onbegrip is het doen van onderzoek in de wiskunde ondenkbaar. De onderzoeker is voortdurend op zoek naar iets dat hij niet begrijpt, zodat de armen uit de mouwen gestoken moeten worden. Zodra het gevonden is, wil hij niets liever dan zijn onbegrip met een collega delen. Als hij pech heeft, begrijpt de collega het wel, en dan is de kwestie snel uit de wereld. Maar met enig geluk prikt hij door het begrip van de collega heen, die dan kan delen in het genoegen. Onderzoek doen is onbegrip opruimen. Voor het vinden van goede onderzoeksonderwerpen is het voldoende om inzicht te hebben in zijn eigen onbegrip. Dit is waar het promovendi vaak aan ontbreekt.

Totzover dan de titel van mijn voordracht, en het is inmiddels ook duidelijk geworden wat ik in de samenvatting bedoel met "het eigen onbegrip dat de professionele wiskundige ten deel valt".

Het centrale deel van mijn voordracht bestaat uit een beschrijving van de middelen waarmee men het onbegrip bestrijdt of, met andere woorden, de middelen waarmee men wiskundig onderzoek doet.

Over de beste manier om wiskunde te doen doet een gemeenplaats de ronde die U vast wel een keer gehoord heeft, namelijk: er *bestaat* helemaal geen beste manier, en het is juist goed voor de vooruitgang van de wiskunde als er op zoveel mogelijk verschillende manieren aan gewerkt wordt. Deze uitspraak doet denken aan de nog bekendere dooddoener dat er over smaak niet valt te twisten. Hoe langer men erover nadenkt, des te minder kan men dit onderschrijven. Net alsof er geen slechte smaak zou bestaan. Net alsof er geen verkeerde manieren zijn om wiskunde te doen. Maar inderdaad, de allerverkeerdste manier is wel om het op maar één manier te doen.

Het beoefenen van wiskunde is een creatieve bezigheid, en U kunt dan ook niet van mij verwachten dat ik er U een recept voor geef. Wel kan ik mij wagen aan de beschrijving van een aantal huismiddeltjes. Over de universele bruikbaarheid van deze middeltjes kan ik mij niet in al te sterke termen uiten, maar ik heb de illusie dat ik niet de enige ben voor wie zij werken.

Om als wiskundige succes te hebben dient men over een redelijke hoeveelheid verstandelijke vermogens te beschikken. Dit is een nodige voorwaarde, waarop U de fee die bij Uw wieg stond aan moet spreken, en niet mij. Deze voorwaarde is echter geenszins voldoende. Jarenlange observatie heeft mij geleerd dat het aantal mensen dat de ambitie heeft een groot wiskundige te worden en daartoe ook de vereiste geestelijke middelen heeft, een groot veelvoud is van het aantal mensen dat daarin slaagt. Bovendien is de mate waarin men slaagt niet gecorreleerd aan op andere wijze meetbare hoeveelheden geestelijke vermogens. Om succes te hebben in de wiskunde moet men afrekenen met een scala aan mentale blokkades. Dat is gemakkelijker gezegd dan gedaan, en de eerste stap is dat men zich van deze blokkades bewust is.

Dames en heren, ik ben werkzaam bij de Universiteit van Californië in Berkeley, en deze instelling is bijzonder begaan met het lot van vrouwen in de wetenschap. Bij de wiskunde heb ik erg weinig vrouwelijke collega's, en de administratie van de universiteit oefent grote druk op ons uit om daar verandering in te brengen. Dit is niet eenvoudig, want het is een ervaringsfeit dat wiskundigen van het door Berkeley gewenste niveau bijna allemaal mannen zijn. Hierover bestaat geen onenigheid. Een logische conclusie is: we moeten meer vrouwelijke wiskundigen *opleiden*. Deze benadering loopt echter vooralsnog stuk op een ander ervaringsfeit, namelijk dat vrouwelijke studenten doorgaans nog minder vooruit te branden zijn dan hun mannelijke collega's. Dit is natuurlijk helemaal niet waar, net zoals het helemaal niet waar is dat Nederlanders zuinig zijn. Er wordt zelfs bij tijd en wijle ontkend dat er *überhaupt* een verschil tussen mannen en vrouwen is. Toch zitten we er mooi mee. Kwade tongen beweren dat de oorzaak van de mindere motivatie van vrouwelijke studenten gezocht moet worden in de ruimere toelatingsquota die op vrouwen van toepassing zijn. De spraakmakende ideologes wijzen echter op een andere omstandigheid: door het ontbreken van voldoende vrouwelijke hoogleraren hebben de vrouwelijke studenten geen *rolmodel* waarnaar ze zich kunnen richten, en daar is de cirkel dan mee rond.

Met het woord "rolmodel" is een van de belangrijkste componenten van een universitaire opleiding in de wiskunde aangegeven. Een wiskunde-afdeling aan een universiteit is een *toneelschool*, waar men door nauwkeurige beluistering en observatie van bestaande wiskundigen hun gedrag leert nadoen. Als men dat zo goed kan dat men niet van een echte wiskundige te onderscheiden is, dan is men wiskundige geworden. Een minimale eis is dat men zich net als een echte wiskundige vragenstellers van het lijf kan houden. Hoe beter men zijn rol kent, des te beter is men als wiskundige.

Laat ik de aldus verworven bekwaamheid illustreren aan de hand van een waar gebeurd voorval. Wiskundige A komt op bezoek bij wiskundige B, met een vraag. De vraag is, of twee "p-deelbare groepen" onder zekere voorwaarden dezelfde zijn. Nu weet U niet wat p-deelbare groepen zijn, maar dat geeft niet, want dat weet ik ook niet en B wist het evenmin. Maar hij heeft wel een keer gehoord dat je kunt zien of twee dingen hetzelfde zijn door het een van het ander af te trekken. Dat is wat hij aan A suggereert. Verbazing bij A: "zou je echt een p-deelbare groep van een andere af kunnen trekken?" B antwoordt dat hij toch wel eens één groep van een andere heeft afgetrokken, en dat A het ook maar eens moet proberen met p-deelbare groepen. De volgende dag meldt A dat het idee gewerkt heeft. B is geslaagd, en weet nog steeds niet wat een p-deelbare groep is. Hij heeft wel geleerd dat het kennelijk helemaal niet zo'n mysterieus concept is, omdat het zich net zo gedraagt als wiskundige begrippen waar hij wèl mee vertrouwd is. Daarmee ziet hij opgewekt de volgende vraag van A tegemoet.

In dit voorbeeld zien we dat men de wetenschap daadwerkelijk verder kan helpen door te pretenderen dat men over kennis beschikt die men niet heeft. U kunt zeggen dat het pure bluf is, en daarin heeft U gelijk. Maar als U zegt dat het op die gronden laakbaar is, moreel of anderszins, dan bent U het slachtoffer van een mentale blokkade die de vooruitgang van de wiskunde in de weg staat. Er is niets mis met bluf die niet als zodanig wordt opgemerkt. Bovendien, het risico ligt geheel bij degeen die bluft, en men kan het aanzienlijk terugbrengen door in het voetspoor van de werkelijk groten op strategisch gekozen momenten te verklaren dat men ergens totaal niets van afweet. Valt men toch door de mand, dan is het een troost om te weten dat de status van een wiskundige meer bepaald wordt door zijn successen dan door zijn mislukkingen, en dat men toch het goede voor had.

Laat ik eens proberen U er op andere wijze van te overtuigen dat het voor een wiskundige vruchtbaar kan zijn te pretenderen dat hij meer weet dan daadwerkelijk het geval is, niet alleen tegenover anderen maar ook tegenover zichzelf. Hiertoe moet ik U eerst vertrouwd maken met de *Hoofdstelling over het doen van wiskundig onderzoek.* Deze hoofdstelling luidt als volgt: *voor iedere vraag die men niet kan beantwoorden is er een gemakkelijker vraag die men evenmin kan beantwoorden.* In de praktijk wordt de hoofdstelling als volgt toegepast. Men denkt na over een probleem, en men komt moeilijkheden tegen. Men probeert een van deze moeilijkheden te isoleren door een gemakkelijker probleem te formuleren waarin deze ene moeilijkheid zich nog wel voordoet, maar de andere niet. De hoofdstelling garandeert dat dat kan. Vervolgens probeert men dit deelprobleem op te lossen. Lukt het nog steeds niet, dan gaat men recursief verder. Lukt het wel, dan gaat men terug naar het oorspronkelijke probleem, en men werkt de andere moeilijkheden op dezelfde manier af.

Heb ik U nu toch een recept gegeven voor het doen van wiskundig onderzoek? Nee, want de hoofdstelling is niet constructief. Van het gemakkelijker probleem wordt wel gezegd dat het bestaat, maar niet hoe het gevonden moet worden. Het is op dit punt dat men creatief moet zijn en alle geestelijke blokkades terzijde moet schuiven. Eén manier om een probleem gemakkelijker te maken is door het maken van meer aannamen. Voorbeelden van zulke aannamen zijn: het vierkleurenprobleem is opgelost (ook al heeft U de oplossing nooit gezien), de eindige simpele groepen zijn allemaal bekend (ook al heeft *niemand* het bewijs ooit gezien), of: p-deelbare groepen zijn net als andere groepen. Hiermee is het toepassen van bluf een speciaal geval van de hoofdstelling geworden.

Als men, na jarenlang met succes totale deskundigheid op een bepaald vakgebied te hebben voorgewend, toch eens het naadje van de kous wil weten, dan is het verstandig er een college over te geven. Studenten zijn niet zo gemakkelijk af te poeieren als collega's, want ze betalen geld om antwoord te krijgen. Nu dient men lange avonden te studeren om de rol uit het hoofd te leren. Is dat moeilijk? Welnee, want ten eerste kent men alle resultaten al, alleen nog niet de volgorde waarin ze gezet moeten worden, en vaak zelfs nog niet de precieze definities. En ten tweede kent men toevallig persoonlijk degeen die deze theorie ontworpen heeft, en men weet uit de eerste hand dat dat een heel dom iemand is, die morst bij het eten en geen Frans spreekt—iets wat *hij* kan, moet men zeker zelf ook kunnen. Men ontdekt dan dat men om een theorie echt gemakkelijk te maken vaak een aantal sous-entendu's opzij moet zetten.

Om uit te leggen wat ik met sous-entendu's bedoel, geef ik wat voorbeelden. Hier heb ik vier vragen voor U. Eén: worden wiskundige begrippen ontdekt of uitgevonden? Twee: zijn reële getallen inderdaad reëel? Drie: zijn axioma's vanzelfsprekende waarheden of tijdelijke aannamen? Vier: wat geeft de meest bruikbare fundamenten voor de wiskunde, logica, verzamelingenleer, of de theorie der categorieën? Vragen als deze hebben een opmerkelijke combinatie van eigenschappen. Het zijn helemaal geen wiskundige vragen, maar toch hebben de meeste wiskundigen er een heel stellige mening over, en discussies over de correcte antwoorden lopen vaak hoog op. De mening van een wiskundige over dergelijke kwesties kan sterk van invloed zijn op de wijze waarop hij over een wiskundig probleem nadenkt. Het kan zeer behulpzaam zijn te denken dat reële getallen inderdaad reëel zijn, want dan weet men zijn intuïtie gesteund door de werkelijkheid, waaraan men ideeën kan ontlenen. In andere gevallen kan het juist behulpzaam zijn te denken dat reële getallen mensenwerk zijn; dat geeft psychologische controle over de situatie en vergroot het geloof in de macht van het menselijk verstand in het algemeen. In ieder enigszins gespecialiseerd vakgebied in de wiskunde is er zo een complex van houdingen en opvattingen dat, ten eerste, bij onderzoek het meeste succes heeft en, ten tweede, sociaal het meest acceptabel is. Dat zijn wat ik sous-entendu's noem. Kijkt men over de rand van zijn vakgebied dan ontdekt men mensen met andere opvattingen en gewoonten—zelfs andere *notatie* is verdacht—en daar voelt men zich niet thuis. Over de grens is niet alleen de taal maar ook het gedrag anders, en als bezoeker van elders heeft men de neiging zich achter een kleurenbril te verschuilen.

Dames en heren, men hoort vaak zeggen dat een wiskundige na zijn dertigste jaar geheel is opgebrand. Voorzover deze bewering waar is, moet men de oorzaak ervan ongetwijfeld zoeken in de grote moeilijkheid die een wiskundige heeft om de betrekkelijkheid in te zien van gewoonten die hij met veel moeite aangeleerd heeft en waar hij ook succes mee gehad heeft. Wiskundigen hebben de sterke neiging te blijven doorlopen in dezelfde straat waar ze hun eerste schreden gezet hebben. De gedachte dat ze bij een wegversperring een zijstraat zouden moeten nemen die via een buurgemeente voert, wordt onbewust als te avontuurlijk verworpen. Maar ook als men zich wel bewust is van de noodzaak zich geestelijk te vernieuwen en zich aan te passen aan conceptuele ontwikkelingen in zijn vakgebied, dan is dit daarmee nog niet gemakkelijk uitvoerbaar geworden. Men draagt zijn verleden als een ballast met zich mee, en men ervaart de noodzaak al het nieuwe dat men leert in te passen in wat men al wist. Dit kan men niet eindeloos blijven doen, en op een gegeven ogenblik dient men de wetenschap het best door dood te gaan. Een van de grootste wiskundigen van de eerste helft van deze eeuw was Carl Ludwig Siegel; lezers van een recent nummer van de *Notices* van de A. M. S. (vol. 42 (1995), pp. 339–350) weten dat als hij eerder was overleden, de wiskunde minder geleden had van de reactionaire opvattingen die hij op latere leeftijd uitdroeg.

Geachte aanwezigen, ik wil nu proberen een aantal van de dingen die ik genoemd heb te illustreren aan de hand van mijn eigen ervaringen in de wiskunde; niet omdat mijn ervaringen interessanter zouden zijn dan die van anderen, maar omdat ik daarvan het meest afweet.

Als student had ik een beeld van de wiskunde dat uitblonk door eenvoud, en dat er als volgt uitzag. Ik deelde de wiskunde in twee delen in, die ik nu gemakshalve het "continue" en het "discrete" deel zal noemen. Continu waren vakken als analyse en meetkunde, die zich er naar mijn inzicht door kenmerkten dat zij uitgingen van axioma's die op zo zorgvuldig mogelijke wijze de wereld om ons heen in exacte termen beschreven. Nu liet mijn relatie tot de wereld om mij heen in die tijd nog meer te wensen over dan tegenwoordig, en ik rekende het continue deel van de wiskunde dan ook niet tot mijn domein. Het discrete deel van de wiskunde bestond voor mij uit vakken als algebra en verzamelingenleer. Dat waren kennelijk gedachtenspelletjes die binnen de menselijke hersenpan plaatsgrepen, en daar voelde ik me veel meer mee op mijn gemak.

Het zal U niet verbazen te horen dat deze simpele kijk op de wereld mij zo nu en dan voor verrassingen stelde. Dit gebeurde de eerste keer, toen ik zag dat er in het algebra-dictaat, in de discrete hoek dus, gebruik gemaakt werd van een stelling die we bij de meetkunde geleerd hadden. Dat vond ik valsspelen. Nog herinner ik me mijn verbazing toen het mogelijk bleek mijn meetkundeboek, waar ik goed vertrouwd mee meende te zijn, door een algebraïsche bril te lezen zonder dat het een woord van zijn geldigheid verloor. Deze kleine crisis in mijn ontwikkeling overwon ik snel door het betreffende stuk meetkunde—*lineaire algebra* geheten—over te hevelen van het continue naar het discrete deel van de wiskunde. Vele jaren later had ik het minder gemakkelijk toen ik kennis maakte met *p-adische analyse*. Ik rekende p-adische getallen overduidelijk tot het door mensen geschapen en dus discrete domein, maar het bedrijven van analyse met deze getallen was inhoudelijk onmiskenbaar een continue bezigheid. Uiteindelijk kon ik niet ontkennen dat de continue component overwon, en dit was een onthulling. Het betekende namelijk dat ik wel degelijk in staat was continue wiskunde te begrijpen. Daarmee was de zin van de onderverdeling goeddeels weggevallen.

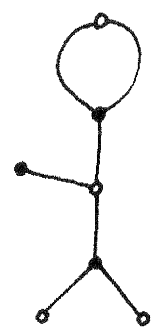
Een andere ervaring uit mijn eerste studiejaren was dat de wiskunde zich aan mij voordeed als een aaneenschakeling van tautologieën. Iedere stelling die ik leerde was min of meer evident—daar waren de definities namelijk naar gemaakt. Met de eerste uitzondering die ik tegenkwam, was het tegelijk goed raak. Dit was de kwadratische reciprociteitswet in de getallentheorie, waarbij het precies andersom was. Niets van de tot dan toe verworven wijsheid had mij erop voorbereid dat deze stelling waar was; integendeel, ik vond het intuïtief volstrekt duidelijk dat zo'n stelling helemaal niet waar *kon* zijn. Het ging hier om een klassiek geval van onbegrip, dat voor mij de aanleiding vormde me nader te verdiepen in de getallentheorie. Uit dat gebied ben ik nooit weer te voorschijn gekomen, en de kwadratische reciprociteitswet heeft zich gerangschikt in een lange rij mysteriën waaromtrent ik mijn onbegrip noodgedwongen heb leren aanvaarden.

De getallentheorie, die men vroeger wel de *hogere rekenkunde* noemde, bestudeert de eigenschappen van de gehele getallen. Hoewel de gehele getallen toch geen mensenwerk zijn, vond ik als student deze theorie typisch een discreet vak; dit was zeker van toepassing op de algebraïsche getallentheorie, die mij meer interesseerde dan de bij het andere kamp horende zogenaamde analytische getallentheorie. U kunt inmiddels wel raden hoe vruchtbaar ik dit onderscheid tegenwoordig vind, en ik wil het daar dan ook niet over hebben. Wel wil ik wat zeggen over de invloed van de *meetkunde* op de getallentheorie, in aansluiting bij een aantal door professor Van der Put getoonde afbeeldingen.

In grote stukken van de algebraïsche getallentheorie werkt men met tamelijk abstracte concepten, waarvan men de eigenschappen pas na verloop van tijd weet te appreciëren. Zo nu en dan gebeurt het dat iemand een meetkundige beschouwingswijze ontdekt die een aantal van deze eigenschappen in een voor de menselijke intuïtie verhelderend licht stelt. Dat vereenvoudigt zowel de toegang tot de theorie als de verdere ontwikkeling ervan, alsmede het gebruik dat men ervan wil maken. Een overtuigend voorbeeld wordt gegeven door de *meetkunde van de getallen*, die de Duitse wiskundige Hermann Minkowski tegen het eind van de negentiende eeuw ontwikkelde. De hoofdstelling van deze leer verkondigt, ruw gesproken, dat het aantal haringen dat in een ton gaat niet groter is dan de inhoud van de ton gedeeld door het volume van een haring. Merk op dat hierin zowel een "continu" concept, namelijk "inhoud", als een "discreet" concept, namelijk "aantal", voorkomt. Dat maakt Minkowski's theorie tot een brug tussen verschillende onderdelen van de wiskunde. Diverse aspecten van de algebraïsche getallentheorie laten zich zonder de meetkunde van de getallen niet op een natuurlijke wijze begrijpen. Eén van de plaatjes die professor Van der Put liet zien (Figuur 1 bij zijn artikel) is gebaseerd op deze meetkundige beschouwingswijze. Het vereist enige oefening hierin haringen en een ton te onderscheiden.

Eerder in deze voordracht noemde ik p-adische getallen. Deze maken onderdeel uit van een gedurende de eerste helft van deze eeuw in de algebraïsche getallentheorie in zwang gekomen zienswijze, die men eveneens meetkundig kan noemen, zij het dat het hier om een wat abstracter soort meetkunde gaat. Deze rangschikt zich samen met Minkowski's theorie onder de *topologische algebra*, niet te verwarren met de *algebraïsche topologie*, die straks pas ter sprake komt.

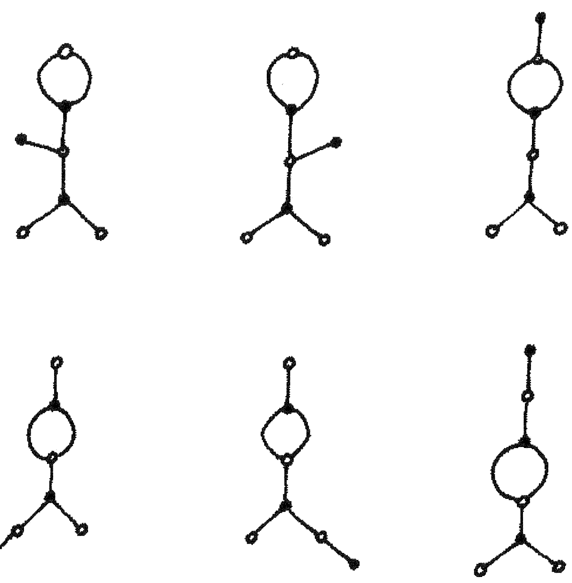
Een tweede plaatje dat professor Van der Put heeft laten zien (Figuur 4 bij zijn artikel) verwijst naar een andere, onafhankelijke manier om meetkundig tegen de algebraïsche getallentheorie aan te kijken. Het zou mij te ver voeren nu uit te leggen wat men wel en niet geacht wordt aan de krabbels op dit plaatje te kunnen zien. Ik beperk me tot de opmerking dat het hier een benaderingswijze betreft die gebaseerd is op gedachten uit de moderne algebraïsche meetkunde. Dit is een cultuur die de laatste tijd sterk in de belangstelling staat, en die onder andere een belangrijke rol gespeeld heeft bij Wiles' recente bewijs van de laatste stelling van Fermat. Ook in het gebied van de algoritmen in de getallentheorie, waar ik mij zelf zeer actief getoond heb, is de algebraïsche meetkunde doorgedrongen, zij het dat het nut van plaatjes als de getoonde daar nog niet is gebleken.



FIGUUR 1. Deze kindertekening geeft aanleiding tot het getallenlichaam $\mathbf{Q}(\alpha)$, waar α één van de zes complexe nulpunten van het polynoom $X^6 + 3X^4 - 4X^3 - 4$ is. De discriminant van dit getallenlichaam is gelijk aan $2^6 \cdot 3^6 \cdot 7^2$; iedere priemfactor hiervan is begrensd door het aantal kanten waaruit de kindertekening bestaat. Meer informatie over de mysterieuze manier waarop met een kindertekening een getallenlichaam geassocieerd kan worden vindt men in de bundel *The Grothendieck theory of dessins d'enfants* (L. SCHNEPS, ed.), Cambridge University Press (1994).

Ik kom nu bij een aantal plaatjes die professor Van der Put niet heeft laten zien. Deze zijn afkomstig uit de theorie der *kindertekeningen*, of *dessins d'enfants*, die Grothendieck, de architect van de moderne algebraïsche meetkunde, alweer een aantal jaren geleden in gang gezet heeft. Met gebruikmaking van middelen uit diverse hoeken van de wiskunde, inclusief groepentheorie, algebraïsche topologie, complexe analyse, en getallentheorie, laat deze theorie zien hoe men met iedere kindertekening (zie Figuur 1) een getallenlichaam binnen het lichaam der complexe getallen kan associëren. Dat is het soort objecten waar men in de algebraïsche getallentheorie opgewonden van raakt. Verscheidene aritmetische eigenschappen van het getallenlichaam zijn gerelateerd aan de combinatoriek van de kindertekening. Isomorfe lichamen krijgt men uit bepaalde verziekingen van de kindertekening (zie Figuur 2)—uit welke is niet duidelijk, en dat is de grote vraag.

Het gaat hier om een typisch geval van onbegrip. Sommigen menen dat de hele theorie absoluut nergens toe leidt. Anderen denken nu op het spoor te zijn van de toegangsweg tot de Heilige Graal. Hoe dit ook zij, niemand schijnt te weten welke richting ingeslagen moet worden, met eventuele uitzondering



FIGUUR 2. De kindertekening uit Figuur 1 is op verschillende manieren verziekt: er groeien nu ledematen uit het hoofd, dat zelf zo nu en dan omgekeerd op het lijf gemonteerd zit. De met deze tekeningen geassocieerde getallenlichamen zijn de zes geconjugeerden van het oorspronkelijke lichaam $\mathbf{Q}(\alpha)$. De beide symmetrische plaatjes horen bij de twee reële nulpunten van $X^6+3X^4-4X^3-4$. Het voorbeeld is ontleend aan de tabellen van G. Malle die in de bij Figuur 1 genoemde bundel opgenomen zijn.

van Grothendieck zelf, die onvindbaar ondergedoken zit. Als er iets is dat mij benieuwt aan de toekomstige ontwikkeling van de algebraïsche getallentheorie dan is het wat er van dit idee zal worden.

Geachte toehoorders, ik heb U verteld over een aantal voornamelijk psychologische technieken die men kan toepassen om zich het doen van wiskundig onderzoek te vergemakkelijken, en ik heb daar een aantal illustraties van gegeven. In mijn samenvatting heb ik U nog een derde onderwerp beloofd, namelijk *het verblijden dat de wiskundige bevangt als hij succes heeft met het bestrijden van onbegrip.* Dit verblijden kent helaas zijn grenzen, en ik wil er niet al te veel over zeggen.

Het is een bijzonder plezierig gevoel om een idee of een inzicht te krijgen dat tot de oplossing van een probleem voert, een gevoel dat men vaak geneigd is in erotische termen te beschrijven. Dit gevoel is van betrekkelijk korte duur. Op een gegeven ogenblik heeft men de indruk dat het inzicht volkomen verwerkt is, men wil er niet meer aan denken, en men gaat op zoek naar een nieuw probleem. Het is namelijk niet leuk om ergens aan te werken als men al weet dat men het kan; met de wijsheid wordt tevens de onverschilligheid bereikt. (Dat is wat het zo moeilijk maakt wijzen te raadplegen.)

Het wordt maatschappelijk niet acceptabel gevonden een verworven inzicht geheel te verwaarlozen. Het vaderschap brengt zijn verantwoordelijkheden met zich mee, en men wordt geacht zijn geesteskind door middel van een publicatie te echten en het op zijn eerste schreden in de wereld te begeleiden. Meent men daar niet de gelegenheid toe te hebben dan dient men het op zijn minst bij een ander onder te schuiven, bijvoorbeeld bij een promovendus. Maar wàt men ook doet, behalve volstrekte verwaarlozing, het is altijd een pijnlijke bevalling, die in schril contrast staat tot de vreugde die ik zoëven beschreef. Vaak wordt men echter beloond doordat onvermoede en bij de oorspronkelijke conceptie niet voorziene plezierige eigenschappen van het geesteskind aan de dag treden. De plezierigste hiervan zijn natuurlijk degene die het minst voorzien waren en die men dan ook het minst begrijpt—waarmee men weer van voren af aan kan beginnen.

Dames en heren, het inzicht dat ik in mijn eigen onvermogen heb, vertelt mij dat *als* er iets is dat ik goed kan, dat wiskunde is. Ik heb nu al drie kwartier iets anders staan doen, en het is hoog tijd ermee op te houden. Ik heb U geen nieuwe wiskunde bijgebracht, maar misschien wel nieuw onbegrip.

Ik dank U voor Uw aandacht.