H.W. Lenstra, Jr.

Het wijnmengersprobleem van Diophantus

Opgedragen aan A.J. Lenstra

Van de dertien boeken *Arithmetica* die de Griekse wiskundige *Diophantus van Alexandrië* omstreeks 250 na Christus geschreven heeft, zijn er in het oorspronkelijk Grieks nog zes over. Deze werden voor het eerst in 1621 in Parijs gepubliceerd, door de Franse ridder *Claude-Gaspar Bachet de Méziriac* (1581–1638), in een kloek deel, waarvan de brede marges de oefengrond voor *Pierre de Fermat*'s (1601–1665) eerste schreden in de getaltheorie zouden vormen. De *Arithmetica* is een losse verzameling door Diophantus geformuleerde en van oplossingen voorziene problemen, en kent niet de hechte logische structuur waar de *Elementen* van zijn ruim vijf eeuwen eerder werkzame plaatsgenoot *Euclides* nog steeds om bewonderd worden. De door de *Elementen* opgeworpen vraagstellingen hebben eeuwenlang de gang van de wiskunde bepaald, maar nu lijkt ook de *Arithmetica* aan de beurt te komen, die de wortels bevat van de fundamentele vragen waar de moderne arithmetische algebraïsche meetkunde zich voor gesteld ziet.

Het laatste probleem van het vijfde boek—nummer 33 volgens Bachet, nummer 30 volgens de op het ogenblik als gezaghebbend geldende Diophantus-editie (Leipzig, 1893–1895) van *Paul Tannery* (1843–1904)—is als enige van alle problemen in de *Arithmetica* in de handschriften in *versvorm* overgeleverd. Op de volgende pagina is de tekst uit Bachet gereproduceerd: een uit vier elegische disticha bestaand epigram, gevolgd door een uitleg in proza. Voor de lezer wie de Griekse ligaturen te machtig zijn, voegt Bachet een Latijnse vertaling bij; als welopgevoed kind van zijn tijd had hij geen moeite met het produceren van Latijnse verzen.

De enige mij bekende Nederlandse Diophantus-vertaling, volgens de laatste inzichten omstreeks 1667 door de Haagse magistraat *Johan Jacob Ferguson* (~1630–1691(?)) vervaardigd, is nooit in druk verschenen (zie J. A. van Maanen's artikel in *Studia Leibnitiana* XXII/2 (1990), 203–216). Uit het onder nr. Ltk 968 in de Leidse Universiteitsbibliotheek te vinden handschrift neem ik het volgende over:

> Het 33.^{e} werckstuck.
>
> Yemant coopt twee wijn vaten, van den eenen een mate voor 8 drachmen, van den andren een mate voor 5 drachmen, en hij betaelt voor altemael een quadraet getal, daer toe geaddeert 60 komt het quad diens zijde is de menichte der maten. vrage hoe veel maten daer van yeder geweest zijn.

QVÆSTIO XXXIII.

ΟΚΤΑΔΡΑΧΜΟΥΣ καὶ πενταδράχμους χοέας τις ἔμιξε,
Τοῖς προπόλοισι πιεῖν χρηστ᾽ ἀποταξάμενος.
Καὶ τιμὴν ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τετράγωνον,
Τὰς ἐπιταχθείσας δεξάμενον μονάδας,
Καὶ ποιοῦντα πάλιν ἕτερόν σε φέρειν τετράγωνον,
Κτησάμενον πλευρὰν σύνθεμα τῶν χοέων.
Ὥστε διάστειλον, τοὺς ὀκταδράχμους πόσοι ἦσαν,
Καὶ πάλι τοὺς ἑτέρους παῖ λέγε πενταδράχμους.

DRACHMARVM quinque, & drachmarum miscuit octo
Quis choeas, famulis vina bibenda suis.
Pro cunctis pretium, numerum præbens tetragonum,
Qui præfinitas suscipiens monadas
Diuersum dat quadratum. Sed summa choarum
Illius exæquat constituitque latus.
Dic age quot choeas drachmarum comparat octo,
Drachmarum choeas, dic age, quinque, puer.

QVOD significatur hoc epigrammate tale est. Quidam emit duos cados vini: vnius quidem choam drachmis 8.

ΤΟ σημαῖνον διὰ τοῦ ἐπιγράμματός ἐστι τοιοῦτον. ἠγόρασέ τις δύο ἐνῆ οἴνου. ἐκ μὲν τοῦ ἑνὸς τὸν χοέα

δραχμῶν η. ἐκ δὲ τοῦ ἑνὸς τὸν χοέα δραχμῶν ε. καὶ ἀπέδωκεν ὑπὲρ πάντων τιμὴν τετράγωνον ἀριθμόν, ὃς προσθεὶς μ° ξ. ἐποίει τετράγωνον, πλευρὰν ἔχοντα τὸ πλῆθος τῶν χοέων. διάστειλον τοὺς ὀκταδράχμους καὶ πενταδράχμους.

alterius verò choam drachmis quinque, & pro omnibus pretium persoluit numerum quadratum, cui addendo 60. fit quadratus latus habens multitudinem choarum. Distingue nunc choas octo drachmarum, à chois quinque drachmarum.

In 1926 publiceerde de Belgische mijningenieur *Paul Ver Eecke* (1867–1959) de volgende vertaling:

XXX

"Obligé de faire une chose utile à ses compagnons de navigation, quelqu'un a mélangé des conges à huit drachmes et à cinq drachmes, et, pour le prix de tous, il a payé un nombre carré qui, augmenté d'unités proposées, te donne à nouveau un autre carré ayant pour racine la somme des conges. Distingue, dès lors, combien il y en avait à huit drachmes, et dis aussi, mon enfant, combien il y en avait d'autres à cinq drachmes".

La signification de cette épigramme est la suivante:

Quelqu'un achète deux sortes de vins; le conge de l'une est à 8 drachmes, et le conge de l'autre à 5 drachmes. Il paie, pour le prix de tous, un nombre carré qui, augmenté de 60 unités, forme un carré ayant pour racine la quantité de conges. Déterminez les conges à 8 drachmes et ceux à 5 drachmes.

Bij het lezen van deze vertaling houde men in het oog dat de tweede regel van het epigram, die gelukkig niet de wiskunde maar slechts de inkleding raakt, verminkt is overgeleverd en door Tannery in 1891 door een ander is vervangen. Zijn niet volledig overtuigende emendatie is sedertdien bij gebrek aan een betere suggestie door iedereen overgenomen, ook door *Arthur Czwalina*, die het probleem in 1952 aldus vertaalde:

30. "Es mischte jemand, der beauftragt war, seinen Seefahrtsgenossen einen Dank zu erweisen, Congien von 8 Drachmen und Congien von 5 Drachmen. Als Preis für alles gab er ein Quadrat, welches, um eine gegebene Zahl vermehrt, dir ein anderes Quadrat gibt, dessen Wurzel gleich der Anzahl aller Congien ist. Überlege also, Knabe, und sage, wieviel Congien zu 8 Drachmen und wieviel Congien zu 5 Drachmen es gewesen sind!"

Die Bedeutung dieses Epigrammes ist diese: Jemand kaufte zwei Sorten Wein. Von der einen Sorte kostete ein Congius 8 Drachmen, von der anderen 5 Drachmen. Für den gesamten Wein bezahlte er eine Quadratzahl von Drachmen, die die Eigenschaft hatte, daß sie um 60 vermehrt, ein Quadrat ergibt, dessen Wurzel die Anzahl der Congien ist. Gib an, wieviel Congien jeder Sort er kaufte.

In 1996 heb ik zelf samen met *Steven Hillion* het probleem als volgt berijmd:

Eight-drachm and five-drachm measures blends
  a man for serving to his friends.
A square he altogether spent,
  which with a given increment
another square would constitute,
  the measures' total as its root.
Now, child, both quantities derive,
  the part at eight, the part at five.

The meaning of this verse is as follows.

Someone bought two sorts of wine, one at 8 drachms per measure and one at 5 drachms per measure. The amount that he spent altogether was a perfect square. Increased by 60 it produced another square, having the number of measures as its root. Derive the eight-drachm and the five-drachm measures.

Zetten we het epigram in modern wiskundeschrift over, dan krijgen we het systeem vergelijkingen

$$8x + 5y = z^2,$$

$$z^2 + c = w^2,$$

$$w = x + y,$$

en de prozaïsche uitleg voegt hier de informatie

$$c = 60$$

aan toe.

Het zal de liefhebber van de arithmetische muze teleurstellen dat de dichter niet in staat is geweest de waarde van het 'given increment' in zijn epigram te verwerken, en dat men hiervoor de bijgevoegde toelichting moet raadplegen; dit is des te verbazender aangezien het probleem zo ruim in zijn jasje zit dat de vier paar dactylische hexameters en pentameters die het Grieks telt zonder verlies van inhoud tot acht Engelse jambische tetrameters te comprimeren zijn. Duidt dit erop dat Diophantus inderdaad zelf aan het dichten is geweest? Om de poëet recht te doen dienen we in elk geval ook de wiskundige kwaliteiten van het probleem in ons esthetisch oordeel te betrekken.

In tegenstelling tot het elegante systeem vergelijkingen waar het aan *Archimedes* (287–212 v. Chr.) toegeschreven en eveneens in versvorm gestelde *runderprobleem* aanleiding toe geeft, oogt de bovengegeven wiskundige formulering van Diophantus' vraagstuk nogal rommelig. Het in de oudheid om zijn moeilijkheid spreekwoordelijke runderprobleem blijkt bij nader onderzoek neer te komen op een *vergelijking van Pell*, hetgeen bij de connaisseur aangename gevoelens teweegbrengt: de ten onrechte naar *John Pell* (1610–1685) genoemde vergelijking kan bogen op een theorie die rijk is zowel aan fraaie resultaten als aan belangrijke open problemen, en op een niet minder rijke historie, waarin het runderprobleem een moeilijk te interpreteren rol speelt. Wat heeft het wijnmengersprobleem van Diophantus tegenover dit alles te stellen?

Wat Diophantus verstond onder het *oplossen* van een systeem vergelijkingen als het onderhavige verschilt in twee opzichten van de huidige practijk. Ten eerste zocht Diophantus alleen oplossingen die uit *positieve rationale* getallen bestaan; tegenwoordig komt men de eis van positiviteit zelden meer tegen, en naast rationale oplossingen beschouwt men ook oplossingen in andere getalverzamelingen. Ten tweede was Diophantus tevreden met het vinden van een enkele oplossing, terwijl de hedendaagse wiskundige in de totaliteit van *alle* oplossingen geïnteresseerd is. In het bijzonder komt men de nu zeer courante systemen die *geen enkele* oplossing hebben bij Diophantus niet tegen; deze ziet men pas in de zeventiende eeuw, bij Fermat, die zijn tijdgenoten verontwaardigde met zijn onthulling dat de door hem als uitdaging gestelde vergelijking $x^3 + y^3 = z^3$ onoplosbaar is in positieve rationale getallen: hij had ze laten zoeken naar iets dat niet bestond! Het ontging hun volledig dat het juist de inhoud van zijn uitdaging was die non-existentie te bewijzen. De opvatting die Fermat's tijdgenoten in navolging van Diophantus huldigden, leeft voort in het tegenwoordige gebruik van de term *oplossing* onder wiskundigen: soms verwijst deze naar een procedure om alle stelsels getalwaarden die aan een gegeven systeem vergelijkingen voldoen te vinden, maar vaker naar een enkel dergelijk stelsel getalwaarden; en als zo'n stelsel niet bestaat heet het systeem *onoplosbaar.*

Zoals we gezien hebben leidt Diophantus' wijnmengersprobleem tot drie vergelijkingen in vier onbekenden x, y, z, w, met één parameter c, die naderhand gelijk aan 60 wordt gesteld. De eerste en de derde vergelijking zijn equivalent met de betrekkingen

$$x = \frac{z^2 - 5w}{3}, \qquad y = \frac{8w - z^2}{3},$$

die men als definitie van x en y opvatten kan. De door de drie vergelijkingen beschreven variëteit is dus isomorf met de hyperbool

$$w^2 - z^2 = c$$

in het w, z-vlak, die in nieuwe coördinaten $u = w - z$, $v = w + z$ geschreven kan worden als $uv = c$. Dit leidt tot de conclusie dat de variëteit een *rationale kromme* is, waarvan de punten geparametriseerd worden door een enkele variabele u, die alle waarden verschillend van 0 kan aannemen, met

$$v = \frac{c}{u}, \qquad w = \frac{v + u}{2}, \qquad z = \frac{v - u}{2},$$

en met x en y gegeven als boven. Deze analyse is geldig over ieder lichaam van karakteristiek verschillend van 2 en 3, en voor iedere $c \neq 0$ in het lichaam, in het bijzonder voor het lichaam der rationale getallen met $c = 60$.

De eis dat x en y positief zijn laat zich vertalen tot de ongelijkheden $8w > z^2 > 5w$. Aan een plaatje ziet men direct dat de hyperbool $w^2 - z^2 = c$ voor iedere positieve c oneindig veel punten met reële coördinaten bevat die aan deze ongelijkheden voldoen. Omdat, voor rationale c, de punten met rationale coördinaten op de hyperbool dicht liggen in de verzameling punten met reële coördinaten—dit volgt uit de bovengegeven parametrisatie—concluderen we dat *het wijnmengersprobleem van Diophantus oneindig veel oplossingen heeft.* Deze oplossingen worden geparametriseerd door een enkele rationale parameter u, die voor $c = 60$ over het interval

$$4 + 2\sqrt{19} - 4\sqrt{2 + \sqrt{19}} < u < \tfrac{1}{2}\left(5 + \sqrt{265} - \sqrt{50 + 10\sqrt{265}}\right)$$

loopt; de onder- en bovengrens van dit interval zijn respectievelijk bij benadering gelijk aan $2,631055$ en $3,345779$.

Tot zover de moderne behandeling van het vraagstuk. Diophantus zelf werd bij het vinden van een oplossing enigszins gehandicapt door zijn algebraïsche notatiesysteem, dat geen symbolen voor onbekenden kende. Desondanks had hij weinig moeite met het probleem, en hij kwam in zijn eigen notatie eveneens op de parameter u uit, waaraan hij opmerkelijkerwijze de waarde 20 toekende; dat hiermee de in zijn behandeling impliciet voorkomende variabele z de negatieve en dus voor hem niet toelaatbare waarde $-17/2$ krijgt zag hij over het hoofd, een onvolkomenheid die de geleerde commentatoren totnogtoe gelukkig ontgaan is. Neemt men $u = 3$ dan komt men zonder deze moeilijkheid eveneens op Diophantus' oplossing $x = 59/12$, $y = 79/12$ uit.

Al met al is het wijnmengersprobleem wiskundig gesproken betrekkelijk flauw, en het kan zeker niet in de schaduw van het probleem van Archimedes staan. Ook in Diophantus' eigen werk komen vele problemen voor die aanzienlijk interessanter zijn.

Verscheidene klassieke Diophantus-edities en -vertalingen bieden, in navolging van Bachet, de lezer een middel zijn teleurstelling over het probleem te verwerken. Zij bevatten namelijk een 45-tal Griekse arithmetische epigrammen, op een enkele na ontleend aan het verder uit *woordraadsels* en *orakelspreuken* bestaande veertiende boek van de *Palatijnse anthologie* (bien étonnés ...). Het zijn luchtig geformuleerde wiskundige puzzels, waarin Gratiën appels uitdelen, kranen waterbekkens vullen, en instortende daken gasten bedelven. Wiskundige diepgang moet men hier niet zoeken, en zal men ook niet vinden. De manier waarop er doorgaans over deze gedichten geschreven wordt, suggereert sterk dat het slechts zeer weinigen gegeven is de poëtische kwaliteiten van een afwisselende opsomming van meisjesnamen en getalwaarden in te zien, maar men kan zich met de toenemende mathematisering van de wereld verbeelden dat onze beschaving deze achterstand op de Griekse een keer zal inlopen.