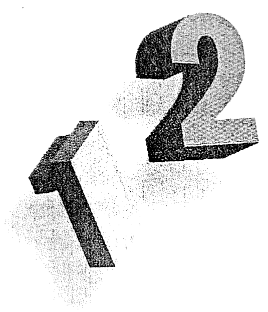
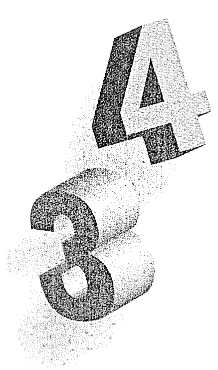


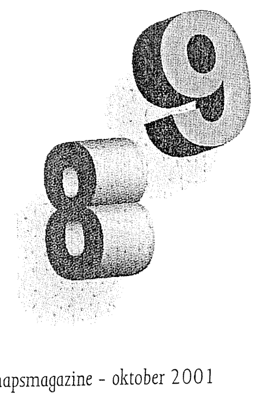
Het leukste van wiskunde is een bewijs

Het geeft aanleiding tot grote tevredenheid als je een kloppend bewijs in elkaar hebt gesleuteld. Het is zó leuk dat je het nóg een keer wilt doen. Aldus verwoordt Hendrik Lenstra zijn lol in de wiskunde.

Hendrik Lenstra
Mathematisch Instituut,
Universiteit Leiden

Prof dr Hendrik Lenstra (52) was van 1977 tot 1986 hoogleraar wiskunde aan de Universiteit van Amsterdam, vanaf 1986 aan de University of California at Berkeley, en vanaf 1998 eveneens aan de Universiteit Leiden. Dit verhaal is een bewerking van de rede die hij bij de aanvaarding van het laatste ambt uitsprak. Hij houdt zich bezig met getallentheorie, met speciale nadruk op algoritmische en algebraïsche aspecten.





Eén van mijn Amerikaanse studenten, Jim Borger, vertelde me een keer van een gesprek dat hij met een andere student had. Die andere student studeerde rechten, en Jim vroeg hem waarom hij dat deed. Wel, was het antwoord, daarmee kan ik een goeie baan krijgen. En waarom wil je een goeie baan, vroeg Jim. Nou, dan verdien ik veel geld. En waarom wil je veel geld verdienen? Dan kan ik een grote auto kopen, en een huis, en een vrouw trouwen, en een gezin stichten. En waarom wil je al die dingen? Wel, zei de rechtenstudent, dat maakt mij *gelukkig*.

Nou, zei Jim, ik studeer wiskunde, en als ik wiskunde doe dan bereik ik hetzelfde in één stap, dan ben ik *direct* gelukkig.

Hoe kan iemand gelukkig worden van wiskunde? Het leukste van wiskunde is een bewijs. Wiskunde zonder bewijzen is als voetbal zonder bal.

Hiernaast bespreken we een heel concrete vraag van Philippe de Vitry, waar hij het antwoord wel op vermoedde, maar niet zeker wist. Zijn vraag: Bestaan er paren *harmonische getallen* (zgn. *harmonische tweetallen*) anders dan 1 en 2, 2 en 3, 3 en 4, en 8 en 9? Door een puur logische redenering maakte Gersonides aan die onzekerheid een finaal einde. We zijn er daardoor rotsvast van overtuigd geraakt, zonder een schijn van twijfel, dat we nooit meer een extra harmonisch tweetal zullen tegenkomen. Als je zo'n redenering hebt gevonden, dan heb je echt iets gedaan. Als je dat in 1342 doet, dan praten de mensen er in het jaar 2000 nog over. Je hebt dan een monument voor jezelf opgericht dat duurzamer is dan brons.

Grote tevredenheid

U kunt zich voorstellen dat het aanleiding geeft tot grote tevredenheid als je zo'n bewijs in elkaar hebt gesleuteld. Dat is zó leuk, dat je het nóg 'ns wilt doen. En dat is makkelijk mogelijk, er zijn eindeloos veel richtingen waarin je verder kunt gaan. Bijvoorbeeld, wat gebeurt er als je twee harmonische getallen zoekt die niet 1 schelen, maar een ander getal, bijvoorbeeld 13? En als je hetzelfde spelletje gaat spelen met je eigen soort harmonische getallen, waarin je bijvoorbeeld ook machten van 5 toelaat?

Het in het kader besproken trucje van Gersonides is op veel van dat soort problemen van toepassing, en op een gegeven ogenblik vind je het geen trucje meer maar een *methode*. Een methode is een trucje dat vaker werkt. Na een tijdje wordt het zo'n routinekwestie dat de

Harmonische tweetallen, of het trucje van Gersonides

Het bewijs in dit kader betreft gehele getallen, en een toepassing in de muziektheorie. Het gaat over de harmonische getallen van Philippe de Vitry. Hij maakte die getallen door eerst een 1 op te schrijven, die ziet u linksboven. Die 1 verdubbelde hij, dat gaf 2, en die schreef hij eronder. Die 2 verdubbelde hij weer, dat gaf 4. Als je zo blijft verdubbelen, dan krijg je de getallen in de voorste kolom: 1, 2, 4, 8, 16, 32 enzovoort. Dat zijn de zogenaamde machten van 2.

Op dezelfde manier heb je de machten van 3, die je krijgt door steeds met 3 te vermenigvuldigen in plaats van met 2. Dan krijg je de getallen die bovenaan staan: 1, 3, 9, 27 enzovoort.

De rest van de getallen in de tabel krijg je door 2en en 3en te combineren. Als je bijvoorbeeld van de 9 die bovenaan staat naar onder gaat dan zie je dat er opnieuw steeds met 2 vermenigvuldigd wordt: 18, 36. En als je van de 8 die links staat naar rechts gaat wordt er steeds met 3 vermenigvuldigd. Een harmonisch getal is een macht van 2 vermenigvuldigd met een macht van 3. In de tabel staan alleen die onder de duizend.

Wat De Vitry wilde, was om twee harmonische getallen te vinden die maar 1 schelen. Daarvan zie je er een paar in de tabel zitten, bijvoorbeeld **3** bovenaan, en **4** een paardensprong daarvandaan. Verder **8** en **9**, **1** en **2**, en **2** en **3**. Wat Philippe de Vitry zich nou afvroeg, was: zijn er geen andere, of is de tabel niet groot genoeg?

Waarom, in vredesnaam, wilde hij dat weten? Philippe de Vitry was een edelman uit het noorden van Frankrijk, en hij was één van de intellectuele zwaargewichten van zijn tijd. Dat was in de Late Middeleeuwen. Aan het eind van zijn leven was hij bisschop, maar hij is het bekendst geworden als componist en

Machten van 3 / **Machten van 2**

	3^0	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6
2^0	1	3	9	27	81	243	729
2^1	2	6	18	54	162	486	14
2^2	4	12	36	108	324	972	2
2^3	8	24	72	216	648	194	
2^4	16	48	144	432	129		
2^5	32	96	288	864			
2^6	64	192	576	17			
2^7	128	384	115				
2^8	256	768	23				
2^9	512	153					

Alleen deze rij bestaat uit oneven getallen; alle andere getallen in de tabel zijn even.

Alleen de getallen in deze kolom zijn niet deelbaar door 3.

Voorbeeld
$2^5 \times 3^3 =$
$32 \times 27 = 864$

Harmonische getallen

Alle harmonische getallen (een macht van 2 vermenigvuldigd met een macht van 3) onder de duizend.

Maar vier paren

Er zijn maar vier harmonische getallenparen (zgn. harmonische tweetallen) die slechts 1 van elkaar verschillen: 1 en 2, 2 en 3, 3 en 4, en 8 en 9.

1	3	9	27
2	6	18	54
4	12	36	108
8	24	72	216

1	**3**	9	27
2	6	18	54
4	12	36	108
8	24	72	216

1	**3**	9	27
2	6	18	54
4	12	36	108
8	24	72	216

1	3	**9**	27
2	6	18	54
4	12	36	108
8	24	72	216

aardigheid er een beetje afgaat, en dat is het moment dat je je meer gaat interesseren voor de gevallen waarin de methode *niet* werkt. Voor die gevallen moet je namelijk een nieuw trucje bedenken, dat trucje daar moet je een methode van maken, en dan ga je kijken welke grenzen dááraan gesteld zijn. En zo ga je door. Maar in welke richting je ook loopt, je komt altijd vrij snel terecht bij de grenzen van wat wiskundigen op het ogenblik kunnen, en dat zijn dan de grenzen die verlegd moeten worden.

Als je je beperkt tot problemen die lijken op het probleem van De Vitry, dan is de brandendste vraag op dit moment het zogenaamde *abc-vermoeden* (*zie kader voor de liefhebber* op pag. 72). In plaats van $3^m+1=2^n$ (zoals in het voorbeeld in onderstaand kader) kijk je dan heel algemeen naar a+b=c, waar a, b en c getallen zijn die nog aan speciale voorwaarden moeten voldoen. Ook de *laatste stelling van Fermat*, over $x^n+y^n=z^n$, is een speciaal geval van het abc-vermoeden, behalve dan dat de stelling van Fermat bewezen is, en het abc-vermoeden niet.

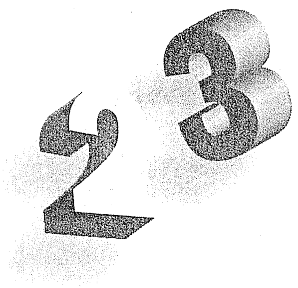
Voor een boel mensen is het abc-vermoeden de Heilige Graal van de moderne getaltheorie, net als de stelling van Fermat dat vroeger was. Misschien duurt het nog een paar honderd jaar voor we die graal te pakken hebben, maar dan hebben we er weer voor een eeuwigheid plezier van.

Romantisch bewijs

Als er in Hilversum een nieuwe studio verrijst, dan staat er niet lang daarna een bespreking van in de krant, waarin op de architectonische verdiensten van het nieuwe gebouw wordt ingegaan.

Maar wat bepaalt onze appreciatie voor een bewijs? Het allereerste waar je op moet letten is dat het inderdaad een *bewijs* is. Het moet kloppen. Als het niet klopt, valt alles weg. Sommige mensen vinden een Rietveldstoel mooi, hoewel je er niet eens in kunt zitten. In de wiskunde komt dat niet voor. Een bewijs met een fout erin is net als een blikopener die het niet doet. Een fout bewijs kan heel opwindend zijn zolang je de fout niet gevonden hebt, maar daarná wil je er liever niet aan herinnerd worden.

Het 'romantische' element van een bewijs bespreek ik aan de hand van een schaakprobleem. In feite is het geen schaakprobleem, maar een eindspelstudie. Als je naar de positie kijkt, dan zie je



Gersonides' bewijs 1

Stel dat twee harmonische getallen elkaar opvolgen. Dan is er één even, en één oneven. Noem het even getal 2^n3^p en het oneven getal 2^q3^m.

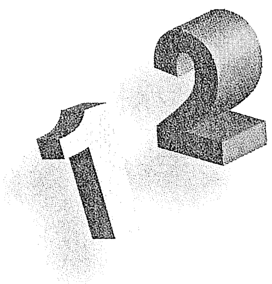
Dan is $2^n3^p + 1 = 2^q3^m$

of $2^n3^p - 1 = 2^q3^m$

al naar gelang degene die even is de grootste of de kleinste van de twee is.

Neem het eerste geval

$$2^n3^p + 1 = 2^q3^m$$



Omdat dit getal niet deelbaar is door 2 ... **moet** het dus in de bovenste rij staan. Dan is q = 0 en 2^q3^m is een macht van 3, ofwel 3^m

Dus $3^m = 2^n3^p + 1$

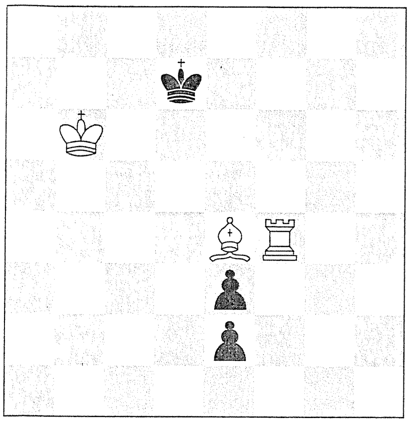
Maar omdat 3^m deelbaar is door 3 ... ... mag 2^n3^p **niet** deelbaar zijn door 3 (als dit getal + 1 een drievoud is, kan het zelf natuurlijk geen drievoud zijn)

als muziektheoreticus. Hij stond in de klassieke traditie, die teruggaat op Pythagoras, die zegt dat muziek een onderdeel van de rekenkunde is. "Muziek is het hoorbaar gemaakte getal" [Boethius].

Harmonische getallen die 1 schelen geven muzikaal interessante 'harmonische' intervallen: een octaaf correspondeert met de verhouding **2:1**, een kwint met **3:2**, een kwart hoort bij **4:3**, en een hele toon bij **9:8**. Geen wonder dat De Vitry wilde weten of er nog meer zulke 'harmonische tweetallen' waren. Hij zal de tabel nog wat groter gemaakt hebben, maar hij moest ergens ophouden, en hij vond geen nieuwe. Ook als je het met een computer doet moet je ergens ophouden, en als je geen nieuwe vindt kom je vanzelf op de vraag: kun je misschien bewijzen dat die er helemaal niet zijn? Daar helpt een computer niet bij, want die kan niet aan oneindig denken, dat blijft mensenwerk.

Op een gegeven moment kwam De Vitry's vraag terecht bij een geleerde rabbi uit de Provence, in het zuiden van Frankrijk. Deze rabbi staat onder vele namen bekend, maar tegenwoordig gebruikt men vooral een Latijnse versie van zijn Hebreeuwse naam, namelijk Gersonides. Die was, net als De Vitry, één van de grootste geleerden die er op dat moment rondliepen. Hij deed wiskunde, sterrenkunde en wijsbegeerte. Hij heeft commentaren op verschillende bijbelboeken geschreven. In een passage van het Hooglied van Salomo ziet hij bijvoorbeeld een allegorie op het verwerven van wiskundige kennis.

Zwart



Wit

Eindspelstudie
R. Réti en H. Rinck (1928).
Wit speelt en wint.

direct dat wit een beetje in de problemen zit, zeker als hij wil winnen. Maar als je wat meer ervaring in het schaken hebt, dan zie je ook vrij snel een mooie manoeuvre die wit kan uitvoeren. Dat is net als die deling door 8 in het bewijs van Gersonides – beginnelingen vinden dat een mysterieuze stap, maar voor experts is het gesneden koek. Als wit die manoeuvre uitvoert, dan lijkt het eerst dat hij daarmee regelrecht wint. Maar als je beter kijkt, dan blijkt dat zwart zich op een geniepige manier voor wit kan verstoppen. Dat zagen we ook in het bewijs dat ik u verteld heb: er was een geval waarin we nog oneindig veel mogelijkheden overhielden, en in dat geval hebben we een zijsprongetje gemaakt.

In de eindspelstudie gebeurt hetzelfde: om zwart toch op de knieën te krijgen, voert wit op het kritieke moment een briljante zet uit, een zet die iedereen van zijn bank doet vallen van verbazing en zwart kan direct opgeven.

U begrijpt uit deze beschrijving al dat ons bewijs wat dit romantische aspect betreft redelijk goed scoort. Het is beslist zo dat een bewijs leuker wordt naarmate er meer verrassingen in zitten, kunstgrepen die uit het niets komen en toch blijken te werken. Nou moet hier wel bij gezegd worden dat wat voor de één een verrassing is, voor de ander een flauwiteit is. Als je je op dezelfde manier drie keer hebt laten verrassen, dan is het de vierde keer geen echte verrassing meer. Als je honderden van die eindspelstudies hebt opgelost, dan heb je de meeste briljante wendingen wel gezien, en dan word je steeds kieskeuriger. Op een gegeven moment is het de moeite niet meer waard, en je houdt ermee op.

Maar met de wiskunde is het anders. Hoe diep je er ook in duikt, op ieder niveau kom je weer eindeloos veel verrassingen tegen. Over al die verrassingen wil je nadenken, je wilt ze begrijpen, je wilt om zo te zeggen de truc tot methode verheffen. Als je een wonder begrijpt, dan ben je in staat het tot je eigen voordeel aan te wenden. Pas als je snapt hoe een vogel kan vliegen, kun je een vliegtuig bouwen.

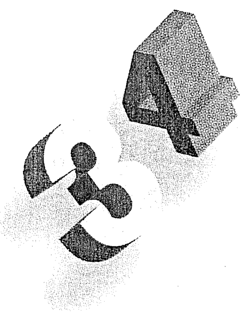
Op z'n janboerenfluitjes

Nu ik toch een vergelijking met schaken trek, wil ik ook iets over de gedwongenheid van een bewijs zeggen. Net zoals je zwart figuurlijk in een hoek dwingt zodat hij alleen nog maar kan opgeven, zo kunnen je harmonische tweetallen ook geen kant meer uit, ze worden allemaal gevangen. Maar dat is niet wat ik met gedwongenheid bedoel. Bij een schaakprobleem betekent het juist dat de witspeler geen keus heeft. Een briljante zet wordt al heel wat minder opwindend als je ook op een veel gewonere manier kunt winnen. Op dezelfde manier is een briljante kunstgreep in een bewijs niet zo indrukwekkend als het op z'n janboerenfluitjes óók wel lukt. Hoe scoort ons bewijs op deze schaal? Waren die delingen door 8 echt nodig? En dat zijsprongetje aan het

Gersonides bewees dat de enige harmonische tweetallen de vier tweetallen zijn die we al ontdekt hadden. Dat er niet meer zijn is misschien niet zo opmerkelijk, maar het is wel opmerkelijk dat hij het kon *bewijzen*. Zijn bewijs geeft je absolute zekerheid dat hoe ver je ook gaat rekenen, je nooit weer een nieuw harmonisch tweetal vindt.

Eerst zei Gersonides, kijk eens naar die tabel met getallen. Welke zijn er even, en je kijkt welke getallen deelbaar door 3 zijn, dan zie je dat ook één van je getallen in de voorste kolom **moet** staan.

Dus nou weten we al: als je een harmonisch tweetal hebt, dan staat één van beide in de bovenste rij, en is dus een macht van 3, en de ander staat in de voorste kolom; die is dus een macht van 2. Dat is al een hele vereenvoudiging, ook als je je computer wilt laten zoeken.



.. en moet 2^n3^p dus wel n de eerste kolom staan.

Dan is p = 0 en 2^n3^p is een macht van 2, ofwel 2^n

Dus $2^n + 1 = 3^m$

Op dezelfde manier kunnen we uit $2^n3^p - 1 = 2^q3^m$ afleiden dat

$$2^n - 1 = 3^m$$

welke oneven? Dat zie je direct: afgezien van de getallen in de bovenste rij zijn ze allemaal even. Dat is natuurlijk geen wonder, want je krijgt ze door het getal dat erboven staat te verdubbelen.

Stel nu dat twee getallen in de tabel 1 schelen. Dan **moet** één van de twee oneven zijn, dus één van beide **moet** in de bovenste rij staan. Op dezelfde manier, als

Er zijn nu twee gevallen: de macht van 3 is de kleinste van het koppeltje harmonische getallen, of het is de grootste van de twee:

$$3^m + 1 = 2^n$$
$$3^m - 1 = 2^n$$

eind? Het antwoord is nee. Wat Gersonides echt deed was ook een beetje anders. Het kwam erop neer dat hij niet keek naar de rest als je door acht deelt, maar als je door tachtig deelt. Dat werkt direct, zoals u zelf mag nagaan. Dat zijsprongetje was misschien wel elegant, maar het was niet nodig.

In het algemeen komt het in de wiskunde zelden voor dat een bepaald resultaat maar op één manier bewezen kan worden. Wiskundigen die een bepaald bewijs willen begrijpen zitten het ook vaak eindeloos te herschikken en anders te formuleren, zodat je na een tijdje helemaal niet meer ziet dat het om hetzelfde bewijs gaat. Bovendien, wanneer noem je twee bewijzen hetzelfde? Als je een bewijs dat in het Nederlands geschreven is in het Frans vertaalt, dan krijg je natuurlijk weer hetzelfde bewijs, alleen anders uitgedrukt. En ook als je het daarna weer terugvertaalt is het niet veranderd. Dat moet je met een gedicht niet proberen. Maar wat gebeurt er als iemand een meetkundig bewijs in algebraïsche termen vertaalt, op de manier die Descartes ons geleerd heeft, of andersom? Gaat het dan om een ander bewijs? Als je oppervlakkig kijkt denk je van wel, maar als je het doorziet dan weet je van niet. Soms zijn twee bewijzen hetzelfde zonder dat iemand het weet.

Zuinigheid

Een andere verdienste zit in zuinigheid. In de eindspelstudie waar ik het over gehad heb, is een bepaald idee uitgedrukt met maar zes stukken op het bord, en die spelen allemaal een rol. In een goed gedicht zit geen woord te veel. Zo is het met een goed bewijs ook, je koerst zonder overbodige omwegen op het doel af, en je gebruikt alleen middelen die je echt nodig hebt. Dat is een grote verdienste. Het geldt ook als lelijk om te veel verschillende gevallen te onderscheiden, wiskunde is niet hetzelfde als puzzelen. Het is veel beter, en meestal ook begrijpelijker, als je alle gevallen allemaal onder één hoedje kunt vangen.

Bewijzen zitten ook niet vast aan één of andere taal, ze stijgen daarbovenuit. Toon Hermans heeft zijn hele leven vergeefs geprobeerd een carrière in Amerika te maken. Als ikzelf in Amerika praat, dan vinden de mensen het net zo leuk als hier. Ik heb al gezegd dat een bewijs duurzamer dan brons kan zijn, men kan zelfs zeggen: duurzamer dan de gedichten van Horatius.

Gersonides' bewijs 2

Het volgende slimme idee van Gersonides is dat hij kijkt wat er gebeurt als je zo'n macht van 3 door 8 deelt. Waarom? Wat heeft 8 ermee te maken? Het antwoord is dat we genieën niet naar hun motivatie moeten vragen. De rede heeft zijn redenen die het hart niet kent. Hij doet dat omdat het werkt, punt uit.

Als we de machten van 3 delen door 8, en je kijkt naar de rest die je overhoudt, dan zie je iets opmerkelijks: de rest is afwisselend 1 en 3. Maar als je dat eenmaal ontdekt hebt, dan is de reden daarvan niet moeilijk te vinden: iedere regel krijg je uit de vorige door met 3 te vermenigvuldigen. Dus na iedere 1 krijg je een 3 en na iedere 3 een 1, en de eentjes en drietjes wisselen elkaar tot in het oneindige af. Wiskundigen zijn dol op dat soort periodieke verschijnselen, want ze geven je één manier om de oneindigheid te controleren.

3^m heeft na deling door 8 rest 1 of 3 al naar gelang m even of oneven is. Met machten van 2 ligt het veel eenvoudiger. De 0e, 1e en 2e macht van 2 zijn 1, 2 en 4. Die zijn kleiner dan 8, dus gelijk aan hun eigen rest. En de 3e en hogere machten van 2 zijn allemaal deelbaar door 8, dus ze hebben rest 0.

Met deze eenvoudige wijsheid kunnen we nu tegelijk het eerste geval van Gersonides afhandelen. Neem een macht van 3 die gevolgd wordt door een macht van 2, dus $3^m+1=2^n$. We weten dat de rest van 3^m gelijk aan 1 of 3 is. Tel daar 1 bij, dan is de rest van 2^n kennelijk 2 of 4. Maar we weten ook dat de rest van 2^n alleen 2 of 4 kan zijn als 2^n zelf gelijk is aan 2 of 4; en dan moet 3^m, die 1 minder is, gelijk zijn aan 1 of 3. Dat geeft de harmonische tweetallen **1** en **2**, en **3** en **4**. Die kenden we al. Daarmee is het eerste geval klaar. U ziet hoe makkelijk dat werkt, die resten bij deling door 8. Je kunt er in één keer oneindig veel situaties tegelijk mee afhandelen, omdat je maar eindig veel resten kunt hebben.

Maar de methode werkt niet altijd. Dat zien we als we het tweede geval ook zo proberen te doen. Dan is 3^m *min* 1 gelijk aan 2^n. De rest van 3^m is 1 of 3, al naar gelang m even of oneven is, en trekken we daar 1 van af dan zien we dat 2^n rest 0 of 2 moet hebben. Rest 2 gaat weer net zo: dan is 2^n gelijk aan 2, en 3^m (die 1 meer is) moet 3 zijn; dat geeft het harmonische tweetal **2** en **3**. Maar met rest 0 weten we alleen dat n minstens 3 is, en dat m even moet zijn. Dat laat oneindig veel gevallen over. Dat is een probleem waar we wat op moeten bedenken.

Delen door 8

Voor deel twee van zijn bewijs kijkt Gersonides wat er gebeurt als je zo'n macht van 3 door 8 deelt.

$3^0 = 1$	$1 = (0 \times 8) + \mathbf{1}$
$3^1 = 3$	$3 = (0 \times 8) + \mathbf{3}$
$3^2 = 9$	$9 = (1 \times 8) + \mathbf{1}$
$3^3 = 27$	$27 = (3 \times 8) + \mathbf{3}$
$3^4 = 81$	$81 = (10 \times 8) + \mathbf{1}$
$3^5 = 243$	$243 = (30 \times 8) + \mathbf{3}$
$3^6 = 729$	$729 = (91 \times 8) + \mathbf{1}$
$3^7 = 2187$	$2187 = (273 \times 8) + \mathbf{3}$
$3^8 = 6561$	$6561 = (820 \times 8) + \mathbf{1}$

Rest afwisselend 1 en 3

Als we de machten van 3 delen door 8, en je kijkt naar de rest die je overhoudt, dan zie je iets opmerkelijks: de rest is afwisselend 1 en 3.

Ik wil het ook over de diepte van een bewijs hebben. Laat ik u eens vertellen wat er gebeurt als ik de vraag van De Vitry, over harmonische tweetallen, als sommetje aan een professionele wiskundige opgeef. Negen van de tien wiskundigen zien niet zo gauw hoe het moet. En als ik het ze dan laat zien, zeggen ze: oh, het is triviaal! En daarmee bedoelen ze dat het niet diep is, dat wil zeggen dat het niet gebruik maakt van ingewikkelde theorieën, en dat het eigenlijk een beetje een belediging is dat ik ze het probleem durf voorleggen.

Het is met de diepte van een bewijs net als met het verrassingselement, het is verschillend van persoon tot persoon. Wat voor de één diep is, is voor een ander, die die ingewikkelde theorieën goed kent, maar oppervlakkig. Misschien denkt u dat diepte op gespannen voet staat met zuinigheid, maar dat is maar in beperkte mate het geval. Vaak is het gewoon nodig om zo'n ingewikkelde theorie aan te roepen. Soms is het niet echt nodig, maar leidt het wel tot meer inzicht.

Je kunt je nu afvragen, wat is er leuk aan een diep bewijs? Wat is er leuk aan om een ingewikkelde theorie toe te passen? En het antwoord is: je hebt jarenlang gezwoegd om die theorie te begrijpen, en nu heb je er eindelijk wat aan. Eindelijk kun je er een probleem mee oplossen dat er ook al was voor je die theorie kende. Eindelijk weet je, waarom je collegegeld betaald hebt. Dat is leuk. En het is ook leuk om theorieën uit een andere hoek van de wiskunde toe te passen, want dat bevestigt het gevoel dat alle wiskundigen hebben, dat de hele wiskunde bij elkaar hoort, en één groot geheel vormt. Het bevestigt ook dat je niet een of ander zijpaadje bent ingewandeld.

Nuttig is leuk

Het is leuk als een bewijs nuttig is. Als je de grondgedachte van een bewijs goed begrijpt, dan kun je ook andere omstandigheden herkennen waarin je dezelfde gedachte kunt gebruiken. Dat levert dan weer een nieuw bewijs. Het gaat hier dus om het nut *binnen de wiskunde* zelf.

Wat betreft het nut *buiten de wiskunde* komt het vaak voor dat één of andere theorie om zuiver wiskundige redenen ontworpen wordt, en dat dan veel later blijkt dat die theorie ook in de gewone maatschappij nuttig is. Dan denk ik: ha, de zuivere wiskunde liep hier op de maatschappij vooruit; en dat vind ik leuk. En het is al heel wat als iets dat je

Geval 1

$3^m + 1 = 2^n$

(veelvoud van 8) + rest

met rest = (1 of 3)

Dus 2^n = (veelvoud van 8) + rest + 1
= (veelvoud van 8) + (2 of 4)
Dus 2^n **moet** bij deling door 8 wel rest 2 of 4 overlaten.

Als rest = 2
dan is n = 1 en m = 0
ofwel getallenpaar is **2** en **1**

Als rest = 4
dan is n = 2 en m = 1
ofwel getallenpaar is **4** en **3**

Geval 2

$3^m - 1 = 2^n$

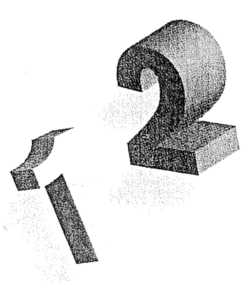
(veelvoud van 8) + rest

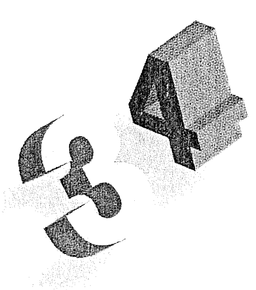
met rest = (1 of 3)

Dus 2^n = (veelvoud van 8) + rest – 1
= (veelvoud van 8) + (0 of 2)
Dus 2^n **moet** bij deling door 8 wel rest 0 of 2 overlaten.

Als rest = 0
dan moet n > 3
en kan m oneindig veel uitkomsten hebben.
Andere truc nodig!

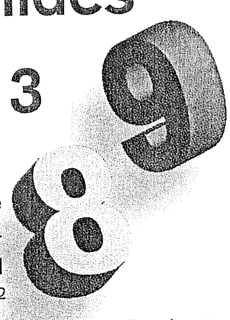
Als rest = 2
dan is n = 1 en m = 1
ofwel getallenpaar is **2** en **3**





voor je plezier doet ook nuttig kan zijn, met schaken en poëzie heb je dat niet. Maar het gebeurt ook vaak andersom, dat de maatschappij met wiskundige problemen komt die we in de wiskunde nog niet tegengekomen waren. Hoe leuk dat is, verschilt sterk van geval tot geval. Sommige van die problemen zijn erg leuk om over na te denken, van andere hoop ik dat ze leuk zijn voor andere mensen.

Gersonides' bewijs 3



Tot slot de laatste truc. U heeft ongetwijfeld op school geleerd dat $a^2 - b^2$ gelijk is aan $a - b$ maal $a + b$. Dat heette vroeger een merkwaardig product. Kijk naar $3^m - 1$. We weten dat m even is, en daaruit volgt dat 3^m een kwadraat is. Het is namelijk wat je krijgt als je een even aantal 3en met elkaar vermenigvuldigt, dus je kunt het ook krijgen door eerst half zoveel 3en met elkaar te vermenigvuldigen, en het resultaat met zichzelf te vermenigvuldigen.

Met andere woorden: 3^m is het kwadraat van $3^{m/2}$. Ook 1 is een kwadraat, dus $3^m - 1$ kun je schrijven als $a^2 - b^2$. Ons formuletje van school toont dus aan dat $3^m - 1$ gelijk is aan $3^{m/2} - 1$ maal $3^{m/2} + 1$. Dat getal is een macht van 2, en als twee getallen vermenigvuldigd een macht van 2 geven dan zijn het zelf ook machten van 2. In het bijzonder is $3^{m/2} + 1$ een macht van 2. En dat is wel heel verbazend, want een macht van 3, plus 1, die een macht van 2 is, dat is net het eerste geval dat we net hebben afgehandeld! Dat bleek maar op twee manieren te kunnen: $m/2$ is 0 of 1. Alleen de laatste kunnen we nu gebruiken: $m/2 = 1$, dus $m = 2$, en dan is $3^m = 9$. Dat geeft ons laatste harmonische tweetal **8** en **9**. Dat is het einde van het bewijs. Ik vind het zelf erg leuk om te zien hoe je in het tweede geval het bewijs afmaakt door een zijsprongetje te maken naar het eerste geval.

In de diepte

voor de liefhebber

Het abc-vermoeden

Het abc-vermoeden gaat over drietallen positieve gehele getallen a, b en c waarvoor geldt $a + b = c$, en waarvoor bovendien a en b grootste gemene deler 1 hebben. Zo'n drietal is in dit verband alleen interessant als het getal r (dat je krijgt door de verschillende priemgetallen die a, b en c delen met elkaar te vermenigvuldigen) kleiner dan c is: $r < c$. In dat geval spreken we van een 'abc-drietal'.

Voorbeeld: $5 + 27 = 32$ geeft het abc-drietal $a = 5$, $b = 27$, $c = 32$, want r is gelijk aan $5 \times 3 \times 2 = 30$, hetgeen inderdaad kleiner is dan c (= 32). Ook het harmonische tweetal **8, 9** ($8 + 1 = 9$) geeft een abc-drietal, met $r = 2 \times 3 = 6 < 9 = c$. Maar $3 + 20 = 23$ geeft geen abc-drietal, want $r = 3 \times 2 \times 5 \times 23 = 690 > 23 = c$. Ook $4 + 8 = 12$ geeft geen abc-drietal, want 4 en 8 hebben niet grootste gemene deler 1.

Het is leuk om naar abc-drietallen te zoeken. Ze zijn betrekkelijk zeldzaam, maar toch bestaan er genoeg om het leuk te maken. In elk geval zijn er oneindig veel; je kunt namelijk voor c een willekeurige macht van 9 nemen, met $a = 1$ en $b = c - 1$. Dus: $1 + 8 = 9$, $1 + 80 = 81$, $1 + 728 = 729$, $1 + 6560 = 6561$, ...

Hier zijn alle vijftien abc-drietallen onder de 300 met $a < b$:

a	b	c	r	q
1	8	9	6	1,2263
5	27	32	30	1,0190
1	48	49	42	1,0412
1	63	64	42	1,1127
1	80	81	30	1,2920
32	49	81	42	1,1757
4	121	125	110	1,0272
3	125	128	30	1,4266
1	224	225	210	1,0129
1	242	243	66	1,3111
2	243	245	210	1,0288
7	243	250	210	1,0326
13	243	256	78	1,2728
81	175	256	210	1,0370
1	288	289	102	1,2252

Het getal q in de laatste kolom geeft de 'kwaliteit' van een abc-drietal aan. Dat is de macht waartoe je r moet verheffen om c te krijgen (dus de logaritme van c met als grondtal r). Hoe groter de kwaliteit q, des te groter is c ten opzichte van r, en des te 'beter' is het abc-drietal. Uit $r < c$ volgt dat q altijd > 1 is.

Grenzen aan de kwaliteit?

Het abc-vermoeden zegt, ruw gesproken, dat q 'meestal' erg dicht bij 1 ligt. Preciezer: als we een geheel getal k vast kiezen, dan geldt $q < 1 + 10^{-k}$ voor alle abc-drietallen met slechts eindig veel uitzonderingen. (Natuurlijk zal het aantal uitzonderingen groter worden naarmate k groter wordt.) Met andere woorden: q heeft limiet 1, als de limiet over alle abc-drietallen genomen wordt.

Het abc-vermoeden zou in het bijzonder impliceren dat er een grens aan de kwaliteit q gesteld is. Misschien is q in feite altijd kleiner dan 2.

Op het ogenblik wordt het abc-drietal met de hoogst bekende kwaliteit gegeven door $a = 2$, $b = 6436341 = 3^{10} \times 109$ en $c = 6436343 = 23^5$, met $r = 15042$ en $q = 1{,}6299$.

Vergelijking van Fermat

Het abc-vermoeden staat in nauw verband met vele andere belangrijke problemen uit de getaltheorie. Om een voorbeeld te geven: elke oplossing van Fermats beroemde vergelijking $x^n + y^n = z^n$ geeft een abc-drietal met $a = x^n$, $b = y^n$, $c = z^n$ en r een deler van $x \cdot y \cdot z$, dus $r < z^3$. De kwaliteit is in dit geval groter dan $n/3$: hoe groter n, des te hoger de kwaliteit. Uit het abc-vermoeden zou dus volgen dat n niet al te groot kan zijn, hetgeen Fermats vergelijking aanzienlijk zou vereenvoudigen.