

## La struttura matematica della Galleria di stampe di Escher

BART DE SMIT, HENDRIK W. LENSTRA JR.

Nel 1956 Maurits Cornelis Escher (1898-1972), grafico d'arte olandese, creò un'originale litografia dal titolo *Prentententoonstelling* (*Galleria di stampe*). Essa mostra un giovane uomo in una galleria d'arte che osserva il quadro di un porto marino mediterraneo. Mentre i suoi occhi seguono gli edifici del molo nella stampa da sinistra a destra, e in basso egli scopre la stessa galleria nella quale si trova. Un tondo bianco nel mezzo della litografia contiene il monogramma e la firma di Escher (Fig. 1).

Quale matematica c'è dietro al *Prentententoonstelling*? C'è un modo più soddisfacente per riempire quel buco bianco centrale? Vedremo che la litografia può essere osservata come se fosse disegnata su una *curva ellittica* definita sul campo dei numeri complessi e scopriremo che una versione idealizzata del quadro si ripeterà nel suo centro. Più precisamente, il quadro contiene una copia di se stesso, ruotata in senso orario di  $157.6255960832\dots$  gradi e diminuita in scala con un coefficiente di  $22.5836845286\dots$

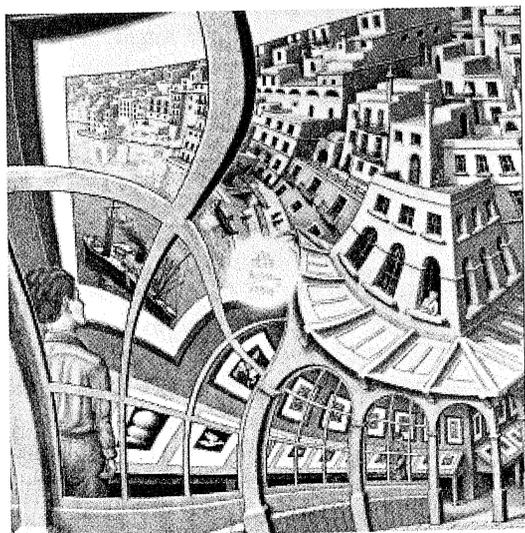


Fig. 1. La litografia di Escher *Prentententoonstelling* (*Galleria di stampe*), 1956  
© 2004 Cordon Art B.V.-Baarn-Holland. Tutti i diritti riservati

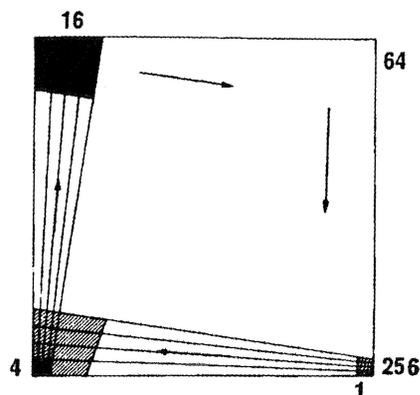


Fig. 2. Un'espansione ciclica espressa attraverso linee rette

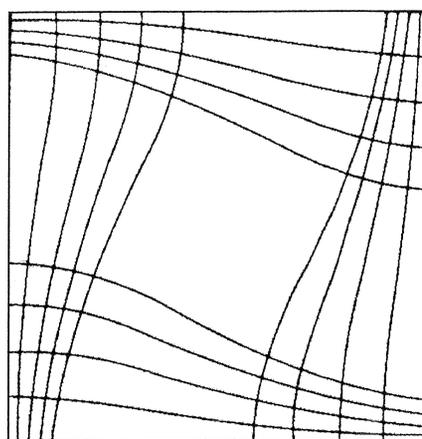


Fig. 3. Un'espansione ciclica espressa attraverso linee curve

## Il metodo di Escher

La miglior spiegazione di come *Prententoonstelling* fu composto si trova in *Lo specchio magico di M.C. Escher* di Bruno Ernst [1], da cui sono state prese le citazioni che seguono e tutte le illustrazioni di questa sezione. Escher partì “dall'idea che deve [...] essere possibile creare una dilatazione anulare,” “un'espansione ciclica [...] senza inizio né fine.” La realizzazione di questa idea gli provocò “alcuni terribili mal di testa.” Dapprima, egli “tentò di mettere in pratica la sua idea utilizzando le linee rette (Fig. 2), ma poi egli adottò intuitivamente le linee curve mostrate nella Figura 3. In questo modo i piccoli quadrati originari potevano meglio conservare il loro aspetto quadrato.”

Dopo un certo numero di miglioramenti successivi, Escher pervenne alla griglia mostrata nella Figura 4. Andando da *A* a *D* i quadrati che compongono la griglia si espandono per un coefficiente 4 in ogni direzione. Se si gira in senso orario intorno al centro, la griglia ruota su se stessa, ma dilatata di un coefficiente  $4^4 = 256$ .

Il secondo ingrediente di cui aveva bisogno Escher era un disegno normale senza distorsioni che rappresentasse la stessa scena: una galleria in cui è allestita una mostra di stampe una delle quali raffigura un porto marino con gli edifici del molo fra i quali c'è la galleria di stampe originaria ma ridotta per un coefficiente pari a 256. Per capire il livello di dettaglio di cui aveva bisogno, Escher fece quattro studi invece di uno solo (Fig. 3), uno studio per ciascuno dei quattro angoli della litografia. La Figura 5 mostra lo studio relativo all'angolo in basso a destra. Ciascuno di questi studi mostra una parte del precedente (modulo 4) ma ingrandita per un coefficiente 4. Dal punto di vista matematico possiamo guardare ai quattro studi di Escher come a un solo disegno invariante rispetto alle diminuzioni in scala di coefficiente 256. Quadrato dopo quadrato Escher

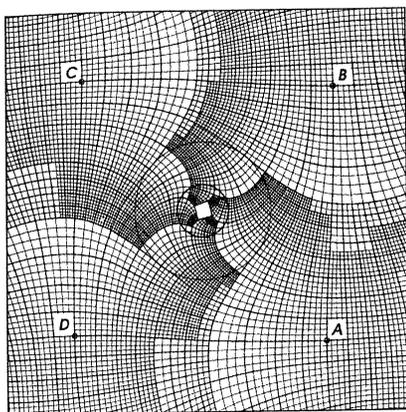
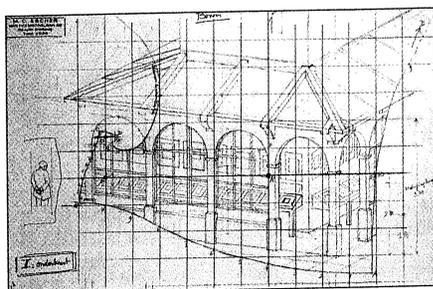


Fig. 4. La griglia di Escher

Fig. 5. Uno degli studi di Escher  
© 2004 Cordon Art B.V.-Baarn-Holland.  
Tutti i diritti riservati

adattò poi la griglia di linee rette dei suoi quattro studi alla griglia curva e in questo modo realizzò il *Prententoonstelling*, come è illustrato nella Figura 6.

Nel seguito immagineremo che il quadro non distorto sia disegnato sul piano complesso  $\mathbb{C}$  con  $o$  al centro. Penseremo ad esso come una funzione  $f: \mathbb{C} \rightarrow \{\text{nero, bianco}\}$  che assegni a ogni  $z \in \mathbb{C}$  il suo colore  $f(z)$ . La condizione di invarianza si esprime allora come  $f(256z) = f(z)$ , per ogni  $z \in \mathbb{C}$ .

### Un periodo moltiplicativo complesso

Il procedimento di Escher fornisce un modo molto preciso di andare avanti e indietro tra il mondo dritto e il mondo curvo. Proviamo a fare alcuni spostamenti sul suo reticolo di curve e tracciamo il percorso corrispondente nel mondo dritto. Innanzitutto consideriamo il percorso che segue le linee del reticolo da  $A$  a  $B$  a  $C$  a  $D$  e di nuovo ad  $A$  (Fig. 4). Nel mondo curvo esso appare come un cammino chiuso. Il percorso corrispondente, mostrato nella Figura 7, nell'ambiente di rette prevede tre svolte a sinistra, ognuna delle quali si compie dopo un cammino che è lungo quattro volte quello precedente.

Non si tratta di un cammino chiuso; piuttosto, se l'inizio è scelto in modo opportuno, il punto finale è a 256 unità dal punto iniziale. La stessa cosa avviene, con la stessa scelta dell'origine, ogni volta che si trasforma un singolo cammino chiuso, in senso antiorario intorno al centro, dal mondo curvo al mondo dritto. Ciò riflette l'invarianza della retta rispetto a un ingrandimento di coefficiente 256.

Nessun fenomeno di questo tipo avviene se noi non giriamo intorno al centro. Per esempio, si parta da  $A$  e si percorrano 5 unità del reticolo tenendo la stessa di-

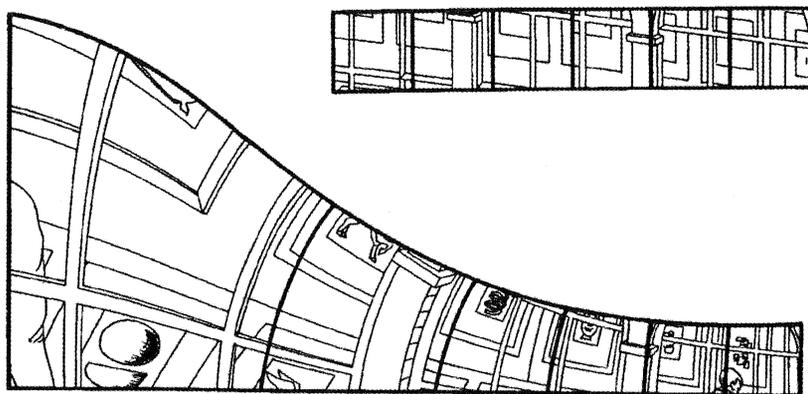


Fig. 6. Adattamento dei quadrati nella griglia curva

rezione; si giri a sinistra, si percorrano altre 5 unità e si faccia lo stesso per altre due volte. Questo genera un cammino chiuso nel mondo curvo rappresentato nella Figura 8, e nel mondo dritto corrisponde a un percorso lungo i bordi di un quadrato  $5 \times 5$ , un altro anello chiuso. Ma ora si faccia la stessa cosa con 7 unità invece di 5: nel mondo dritto si ottiene ancora un cammino chiuso, lungo i bordi di un quadrato  $7 \times 7$ , ma nel mondo curvo il percorso non finisce in  $A$  ma nel vertice  $A'$  del piccolo quadrato nel mezzo. Ciò è illustrato nella Figura 9. Poiché  $A$  e  $A'$  evidentemente corrispondono al medesimo punto nel mondo dritto, ogni quadro fatto secondo il procedimento di Escher, dovrebbe, idealmente, ricevere lo stesso colore in  $A$  e  $A'$ . Scriviamo *idealmente* poiché nella litografia originale di Escher,  $A'$  finisce nell'area circolare posta al centro. Identifichiamo ora il piano, sul quale la griglia curva di Escher – o la sua litografia – è tracciata, di nuovo con  $\mathbb{C}$  ponendo l'origine al centro. Definiamo  $\gamma \in \mathbb{C}$  con  $\gamma = A / A'$ . Una misurazione grossolana indica che  $|\gamma|$  è un po' più piccolo di 20 e che l'argomento di  $\gamma$  è circa 3.

Sostituendo  $A$  nel procedimento precedente con un qualsiasi punto  $P$  giacente su una delle linee della griglia  $AB, BC, CD, DA$ , troviamo un punto  $P'$  corrispondente a  $P$  giacente sul perimetro del piccolo quadrato nel mezzo, e  $P'$  idealmente riceverà lo stesso colore di  $P$ . Nei limiti dell'accuratezza, appare che il quoziente  $P / P'$  è indipendente da  $P$  e perciò uguale a  $\gamma$ . Ciò è quanto assumeremo. Così, quando il "quadrato"  $ABCD$ , viene ruotato in senso orario per un an-

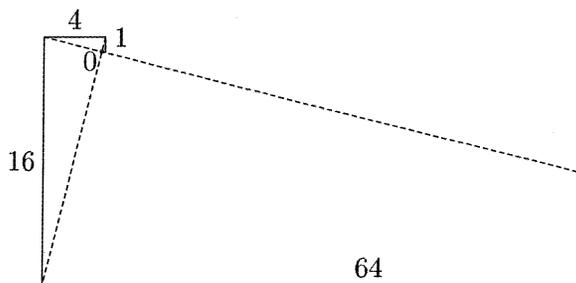


Fig. 7. Il quadrato  $ABCD$  trasformato nel mondo dritto

220

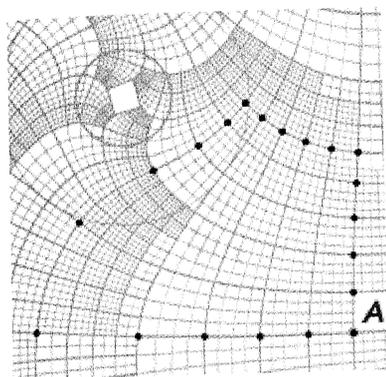


Fig. 8. Un quadrato 5 x 5 trasformato nel mondo curvo

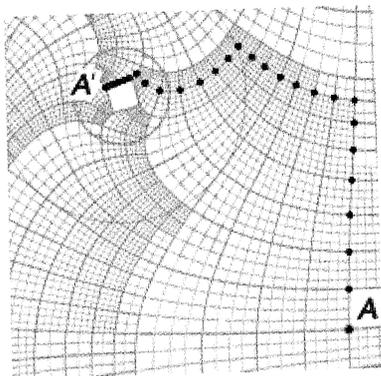


Fig. 9. Un quadrato 7 x 7 trasformato nel mondo curvo

golo di circa  $160^\circ$  e ristretto per un coefficiente circa pari a 20, coinciderà con il piccolo quadrato centrale.

Sia  $g$  la funzione, definita su un appropriato sottoinsieme di  $\mathbb{C}$  e con valori in  $\{\text{nero, bianco}\}$ , che assegna ad ogni  $w$  il suo colore  $g(w)$  nella litografia di Escher. Se Escher avesse usato la sua intera griglia – che, verso il centro, non usò – allora, come abbiamo appena detto, si sarebbe per forza ottenuto  $g(P')=g(\gamma P')$  per tutti i  $P'$  come sopra, e quindi avremmo potuto estendere il suo quadro a tutto  $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$  postulando  $g(w)=g(\gamma w)$  per tutti i  $w$ . Così si riempirebbe non solo il buco dentro la litografia di Escher, ma anche l'immensa area che si trova fuori dai suoi confini.

221

## Curve ellittiche

Mentre il quadro delle rette è periodico di periodo moltiplicativo 256, una versione idealizzata del quadro distorto è periodica con un periodo complesso  $\gamma$  tale che:

$$f(256z)=f(z), g(\gamma w)=g(w).$$

Qual è la connessione tra 256 e  $\gamma$ ? Si può determinare  $\gamma$  senza misurarlo nella griglia di Escher?

Iniziamo con il riformulare ciò che conosciamo. Per comodità, togliamo l'origine o da  $\mathbb{C}$  e consideriamo funzioni su  $\mathbb{C}^*$  invece che in  $\mathbb{C}$ . Questo lascia un buco che, diversamente da quello di Escher, è troppo piccolo da notare. Subito dopo, invece di considerare la funzione  $f$  con periodo 256, possiamo anche considerare la funzione indotta  $\bar{f}: \mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle \rightarrow \{\text{nero, bianco}\}$ , dove  $\langle 256 \rangle$  denota il sottogruppo di  $\mathbb{C}^*$  generato da 256. Nello stesso modo, invece di  $g$  considereremo  $\bar{g}: \mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle \rightarrow \{\text{nero, bianco}\}$ . La griglia di Escher fornisce il dizionario per andare avanti e indietro tra  $f$  e  $g$ . Un attimo di riflessione mostra che tutto ciò che fa è fornire una biiezione  $h: \mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle \xrightarrow{\sim} \mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle$  tale che  $g$  sia dedotto da

$f$  attraverso una composizione:  $\bar{g} = \bar{f} \circ h$

La proprietà chiave della funzione  $h$  è chiarita grazie alla citazione di Bruno Ernst, "... I quadrati originali potrebbero mantenere meglio la loro apparenza quadrata": Escher desiderava che la funzione  $h$  fosse un isomorfismo conforme, in altre parole un isomorfismo di varietà analitiche complesse di dimensione 1.

La struttura di  $\mathbb{C}^*/\langle \delta \rangle$ , per ogni  $\delta \in \mathbb{C}^*$ ,  $|\delta| \neq 1$ , è facile da capire. La funzione esponenziale  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*$  induce una funzione suriettiva conforme  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^*/\langle \delta \rangle$  che identifica  $\mathbb{C}$  con il ricoprimento universale di  $\mathbb{C}^*/\langle \delta \rangle$  e il cui nucleo  $L_\delta = \mathbb{Z}2\pi i + \mathbb{Z} \log \delta$  può essere identificato con il gruppo fondamentale di  $\mathbb{C}^*/\langle \delta \rangle$ . Inoltre, riconosciamo  $\mathbb{C}^*/\langle \delta \rangle$  come una versione appena camuffata della curva ellittica  $\mathbb{C}/L_\delta$ .

Con queste informazioni indaghiamo su quale funzione sia  $h: \mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle \rightarrow \mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle$ . Scegliendo opportunamente le coordinate, possiamo assumere che  $h(1) = 1$ .

Dalla topologia algebrica, sappiamo che  $h$  definisce un unico isomorfismo conforme  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  che manda 0 in 0 e induce un isomorfismo  $\mathbb{C}/L_\gamma \rightarrow \mathbb{C}/L_{256}$ . Un risultato standard sui tori complessi ([2], cap. VI, Teorema 4.1) implica che la funzione  $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  sia la moltiplicazione per un certo scalare  $\alpha \in \mathbb{C}$  che verifica,  $\alpha L_\gamma = L_{256}$ . Così otteniamo un isomorfismo tra due successioni esatte corte:

$$\begin{array}{ccccc} 0 \rightarrow L_\gamma & \rightarrow & \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle \rightarrow 0 \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \alpha & & \downarrow h \\ 0 \rightarrow L_{256} & \rightarrow & \mathbb{C} & \xrightarrow{\text{exp}} & \mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle \rightarrow 0 \end{array}$$

La Figura 10 ci mostra il quadrato commutativo a destra.

Per calcolare  $\alpha$  ci serviamo del fatto che l'applicazione moltiplicazione per  $\alpha$   $L_\gamma \rightarrow L_{256}$  può essere pensata come una applicazione tra i gruppi fondamentali; invero, non è niente altro che l'isomorfismo tra i gruppi fondamentali di  $\mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle$  e  $\mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle$  indotto da  $h$ . L'elemento  $2\pi i$  nel gruppo fondamentale  $L_\gamma$  di  $\mathbb{C}^*/\langle \gamma \rangle$  corrisponde a un singolo cammino chiuso antiorario intorno all'origine in  $\mathbb{C}^*$ . Quanto all'omotopia è come il percorso ABCDA lungo le linee della griglia che abbiamo considerato precedentemente. Come possiamo vedere, il procedimento di Escher lo trasforma in un percorso in  $\mathbb{C}^*$  che gira ancora una volta sola intorno all'origine e nello stesso tempo moltiplica per 256; in  $\mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle$  questo percorso diventa un cammino chiuso che rappresenta l'elemento  $2\pi i + \log 256$  di  $L_{256}$ .

Così il nostro isomorfismo  $L_\gamma \rightarrow L_{256}$  manda  $2\pi i$  in  $2\pi i + \log 256$  e quindi  $\alpha = (2\pi i + \log 256)/(2\pi i)$ . Il reticolo  $L_\gamma$  è ora dato da  $L_\gamma = \alpha^{-1} L_{256}$ , e da  $|\gamma| > 1$  si deduce:

$$\gamma = \exp(2\pi i (\log 256)/(2\pi i + \log 256)) = \exp(3.1172277221 + 2.7510856371 i).$$

La funzione  $h$  è data dalla semplice formula

$$h(w) = w^\alpha = w^{(2\pi i + \log 256)/(2\pi i)}.$$

La griglia ottenuta dalla nostra formula è mostrata nella Figura 11. Essa è simile in modo impressionante alla griglia di Escher; il nostro piccolo quadrato

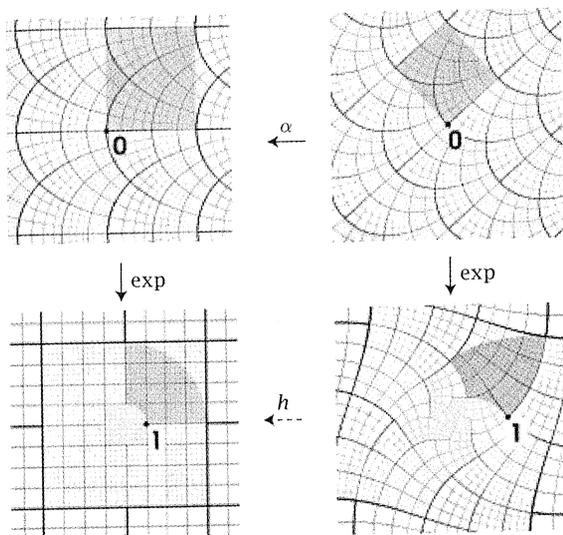


Fig. 10. L'immagine in basso a sinistra, disegnata su  $\mathbb{C}^*$ , è invariante rispetto alla moltiplicazione per  $i$  e per  $4$ . Retratta a  $\mathbb{C}$  dalla funzione esponenziale, dà vita a un'immagine che è invariante per traslazione del reticolo  $\frac{1}{L_{256}} = \mathbb{Z} 2\pi i + \mathbb{Z} \log 4$ . Retraendo questa immagine con una moltiplicazione scalare per  $\alpha = (2\pi i + \log 256)/(2\pi i)$  cambia il periodo del reticolo in  $\frac{1}{L_{\gamma}} = \mathbb{Z} 2\pi i + \mathbb{Z} (\pi i \log 4)/(\pi i + 2 \log 4)$ . Poiché l'ultimo reticolo contiene  $2\pi i$  l'immagine può essere ora trasformata in avanti da una funzione esponenziale. Ciò produce l'immagine in basso a destra, che è invariante rispetto alla moltiplicazione per tutte le quattro radici di  $\gamma$ . La freccia orizzontale in basso rappresenta la funzione a più valori  $w \rightarrow h(w) = w^\alpha = \exp(\alpha \log w)$ ; è solo modulo la simmetria in scala che è ben definita

223

centrale è più piccolo di quello di Escher; ciò riflette il fatto che il nostro valore  $|\gamma| \approx 22.58$  è più grande di quello misurato nella griglia di Escher. Il lettore può notare altre differenze, e tutte rivelano che Escher non realizzò perfettamente l'obiettivo che si era proposto di disegnare una griglia conforme, ma è degno di nota quanto vicino fosse andato grazie al procedimento che gli procurava "alcuni terribili mal di testa".

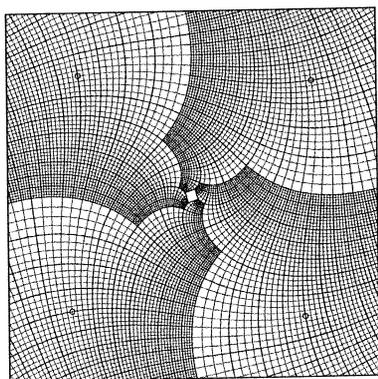


Fig. 11. La griglia perfettamente conforme

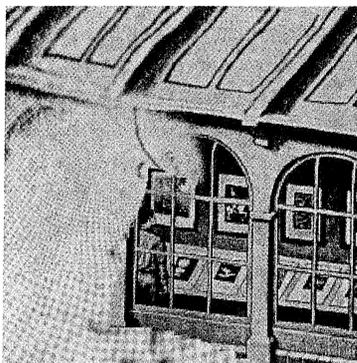


Fig. 12. La litografia di Escher rettificata per mezzo della sua griglia

### Per riempire il buco

Per riempire il buco in *Prententoonstelling*, abbiamo per prima cosa ricostruito gli studi di Escher dalla griglia e dalla litografia ribaltando la sua stessa procedura. A questo scopo abbiamo utilizzato un software realizzato specificatamente per questa situazione, scritto da Joost Batenburg, studente di matematica a Leiden. Come si può vedere nella Figura 12, la macchia bianca nel mezzo ha dato origine a una spirale vuota negli studi ricostruttivi, e ad altre imperfezioni. Successivamente, due artisti olandesi, Hans Richter e Jacqueline Hofstra hanno completato e corretto le immagini ottenute (Fig. 13).

Quando venne il momento di aggiungere la necessaria scala dei grigi, ci imbattemmo in problemi quali la risoluzione discontinua e il cambiamento delle ampiezza della linea. Decidemmo che il modo naturale di superare questi problemi era di richiedere che la densità di pixel sulla nostra curva ellittica fosse uniforme nella misura Haar. In pratica abbiamo usato la funzione esponenziale, per riportare i bozzetti su  $\mathbb{C}$  ottenendo una figura doppiamente periodica; fu in questa immagine che venne aggiunta, da Jacqueline Hofstra, la scala dei grigi che risultò nell'immagine doppiamente periodica della Figura 14. La versione completata della litografia di Escher, mostrata nella Figura 15, risultava allora facile da produrre.

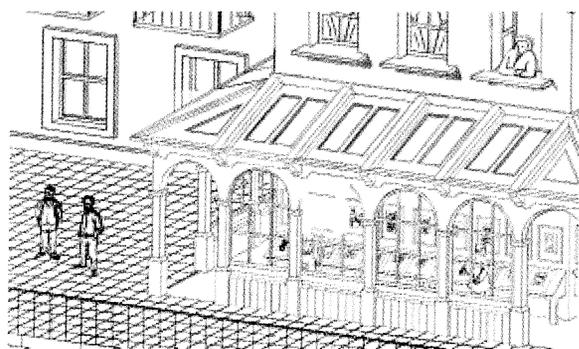


Fig. 13. Un dettaglio del disegno fatto da Hans Richter e Jacqueline Hofstra

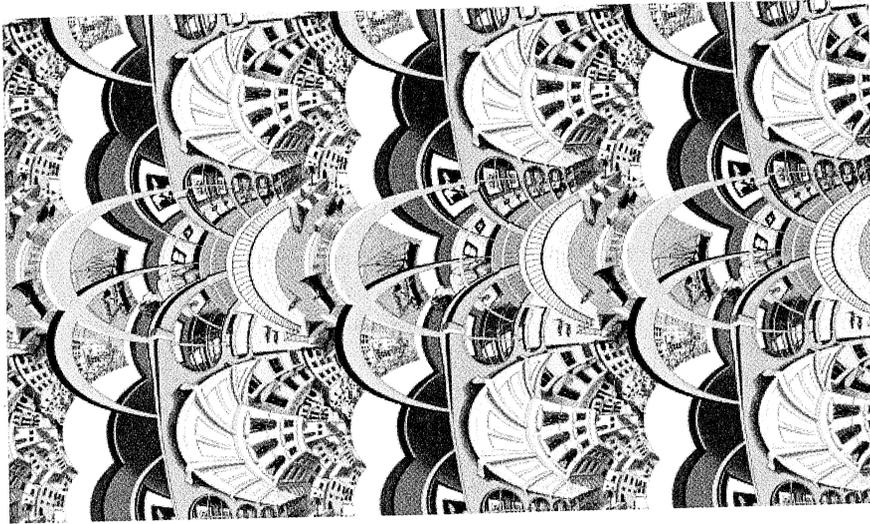


Fig. 14. Il disegno a linee rette originario trasformato, attraverso una funzione esponenziale complessa, in una immagine doppiamente periodica con l'aggiunta di una scala di grigi. Il periodo orizzontale è  $\log 256$ , il periodo verticale è  $2\pi i$

Altre funzioni analitiche complesse  $h: \mathbb{C}^*/\langle \delta \rangle \rightarrow \mathbb{C}^*/\langle 256 \rangle$  per vari  $\delta$  generano varianti interessanti di *Prententoonstelling*. Per osservarle e vedere animazioni in "zooming" al centro dell'immagine, invitiamo il lettore a visitare il sito [escherdroste.math.leidenuniv.nl](http://escherdroste.math.leidenuniv.nl).

225

## Ringraziamenti

Si ringraziano Joost Batenburg, Cordon Art, Bruno Ernst, Richard Groenewegen, Jacqueline Hofstra e Hans Richter per la cooperazione. Cordon Art possiede i diritti di tutte le opere di M.C.Escher. Il progetto è stato finanziato dal premio Spinoza assegnato dalla Nederlandse Organisatie voor Wetenschappelijk Onderzoek (NWO).

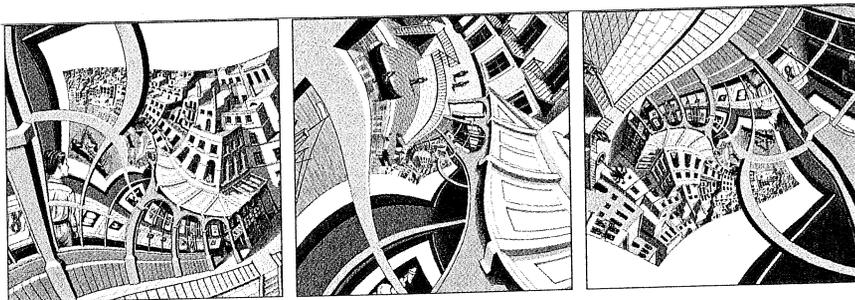


Fig. 15. La versione della litografia di Escher completata con gli ingrandimenti del centro di coefficienti 4 e 16

Si ringrazia la American Mathematical Society per aver concesso l'utilizzo del testo tratto da: *Notices of the AMS*, April 2003, vol. 50, pp. 446-451.

## Bibliografia

- [1] B. Ernst (1976) *De toverspiegel van M.C.Escher*, Meulenhoff, Amsterdam; trad. it. B. Ernst (1978) *Lo specchio magico di M.C. Escher*, Taschen
- [2] J. Silverman (1986) *The Arithmetic of Elliptic Curves*, Springer-Verlag, New York
- [3] E. Thé (design) (2000) *The Magic of M.C.Escher*, Harry N. Abrams, New York and London