

ESCHER EN HET DROSTE-EFFECT

door

Prof. dr H. Lenstra

Faculteit Wiskunde en Natuurwetenschappen, Universiteit Leiden

Op de litho *Prentententoonstelling* van M.C. Escher (1898–1972) staat een jongeman in een galerij te kijken naar een prent van een havenstad. Door middel van een draaiende vervorming is het Escher gelukt de galerij waar de jongeman in staat deel te laten uitmaken van de stad op de prent. In het midden heeft Escher een wit gat opengelaten, met daarin zijn monogram en handtekening.

In deze voordracht zal ik ingaan op de wiskundige structuur die achter Eschers litho schuilgaat. Deze structuur maakt ook duidelijk wat zich in het mysterieuze gat afspeelt. Met behulp van een scanner, programmatuur en twee tekenaars is in een drie jaar lopend project aan de Universiteit Leiden, dat mede onder leiding van Dr. B. de Smit stond, een reconstructie van de prent gemaakt waarin het gat is opgevuld. Tevens zijn er allerlei varianten van de prent gemaakt en animaties waarmee de kijker het gat in vliegt.

Anders dan in vele andere werken van Escher, is er in deze litho geen herhaling zichtbaar. In een geïdealiseerde versie van de prent blijkt evenwel een Droste-effect op te treden: de prent bevat een copie van zichzelf die een factor 22,5836845286 . . . verkleind is, en tegelijk gedraaid over een hoek van 157,6255960832 . . . graden met de klok mee. Deze getallen liggen volledig vast door de wiskunde achter de principes waar Escher, die geen formele training als wiskundige had, op intuïtieve wijze mee werkte. Onbewust heeft Escher een uit de negentiende eeuw stammend meetkundig concept verbeeld, dat bij tegenwoordige wiskundigen bekend staat als een “elliptische kromme over de complexe getallen”.

Eschers constructie

In *De toverspiegel van M.C. Escher* van Bruno Ernst (Meulenhoff, Amsterdam, 1976), waar ook de illustraties bij deze paragraaf vandaan komen, wordt uitgelegd hoe Escher zijn litho gemaakt heeft. Escher wilde een “ringvormige uitdijning” uitbeelden. Als we onze blik over

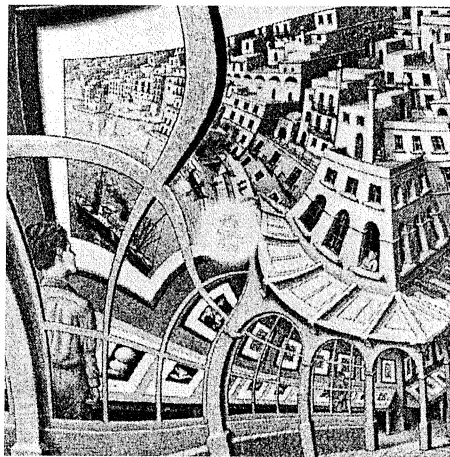


Fig. 1. *Prentententoonstelling* (1956)

de prent laten gaan, met de klok mee rond het midden, dan zien we dat we inderdaad steeds inzoomen. "Escher probeerde aanvankelijk het idee met rechte lijnen te verwezenlijken. Intuïtief kwam hij echter tot de gebogen lijnen van figuur [2]. De oorspronkelijke vierkantjes blijven dan ook beter 'vierkant'."

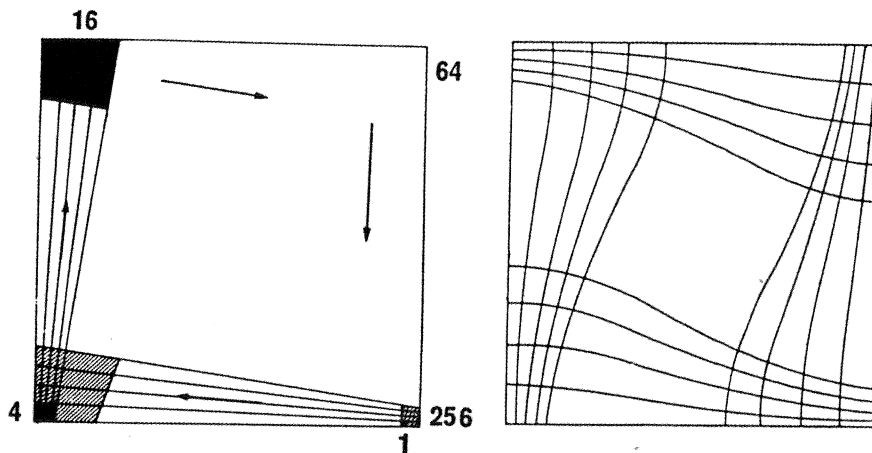


Fig. 2. Ringvormige uitdijing met rechte en met kromme lijnen

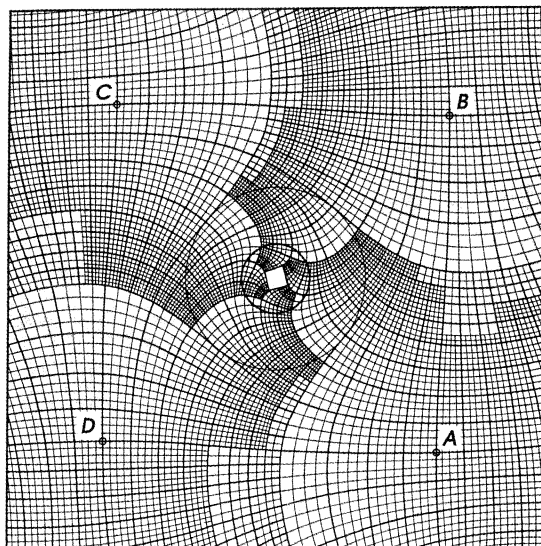


Fig. 3. Eschers rooster

Langs deze weg construeerde Escher het speciale millimeterpapier van Figuur 3. Met de klok mee lopend langs de vier zijden van het vierkant *ADCBA* ziet men de schaal vier maal met een factor 4 uitdijen. Als men rond is, blijkt het rooster als het ware over zichzelf heengevouwen te zijn, waarbij het met een factor $4^4 = 256$ uitgedijd is.

Escher vervaardigde vier onvervormde schetsen waarin de man in de prentengalerij naar een prent van een stad kijkt, waarin de prentengalerij weer staat. De eerste schets, afgebeeld in Figuur 4, bevat een met een factor 4 verkleinde copie van de tweede, de tweede van de

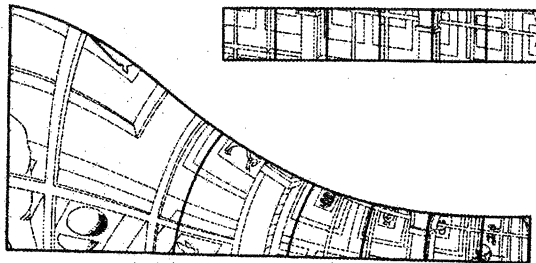
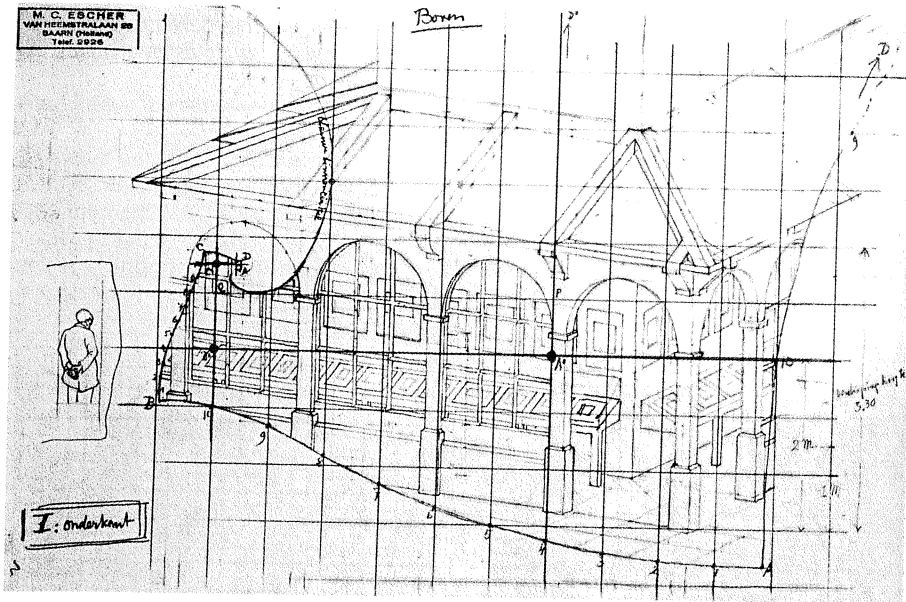


Fig. 4. Een rechte schets van Escher, en het inpassen in het kromme rooster

derde, de derde van de vierde, en de vierde weer van de eerste. Al met al kan men deze vier schetsen dus opvatten als een enkel plaatje dat een Droste-effect heeft: het bevat een copie van zichzelf die $4^4 = 256$ keer zo klein is. In de schetsen is een recht ruitenpatroon zichtbaar, en met behulp hiervan bracht Escher vierkantje voor vierkantje zijn schetsen over op zijn kromme millimeterpapier (Figuur 4).

Een ander soort Droste-effect

Eschers methode geeft een heel precieze manier om heen en weer te gaan tussen de kromme wereld van de Prentententoonstelling en de rechte wereld van zijn vier schetsen. Als we bijvoorbeeld over roosterlijnen het vierkant $ABCD$ in de kromme wereld aflopen, hoe ziet dat er dan uit in de rechte wereld? Welnu, we lopen steeds over roosterlijnen, die in de rechte wereld dus horizontale of verticale rechten zijn, en de rechte afstand die we lopen, wordt door de verfijning in het rooster na elke hoek linksom steeds 4 maal zo groot. Dit pad in de rechte wereld staat in Figuur 5. Door geschikte keuze van de oorsprong zien

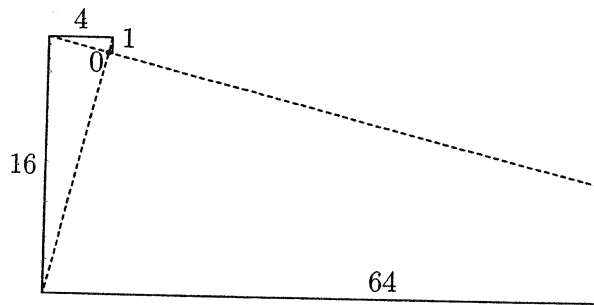


Fig. 5. Het pad ABCDA
in de rechte wereld

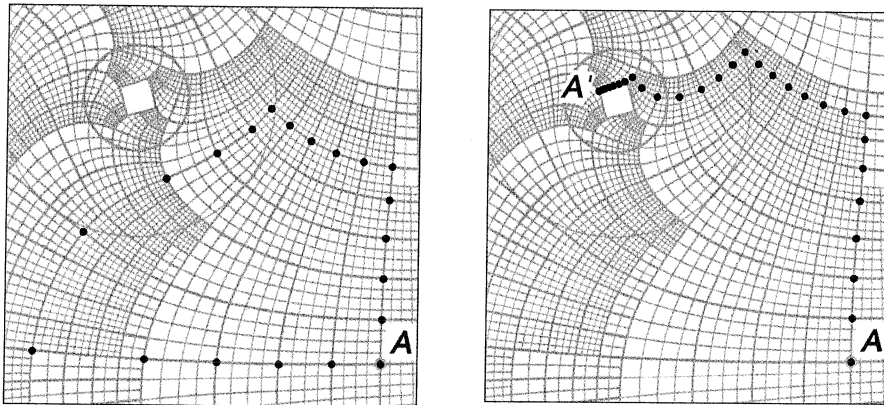


Fig. 6. Wandeling langs een vierkant van 5×5 en 7×7 , weergegeven in de kromme wereld.

we dat we het eindpunt van het pad in de rechte wereld krijgen door het beginpunt met 256 te vermenigvuldigen. Het Droste-effect in de rechte wereld zorgt ervoor dat de voorstelling op de tekening bij begin- en eindpunt van de wandeling inderdaad "dezelfde" is, maar dan op een verschillende schaal.

Laten we nu in de rechte wereld een vierkant aflopen, te beginnen bij het punt dat in de kromme wereld A heet. Als we vijf eenheden richting B lopen, dan links afslaan, weer 5 eenheden lopen, en dat nog twee keer doen, dan zijn we terug waar we begonnen (zie Figuur 6). Maar als we het vierkant iets groter maken gebeurt er iets vreemds. Als we in de rechte wereld een vierkant van 7×7 aflopen, dan geeft dat in de kromme wereld een wandeling waarvan het beginpunt A niet hetzelfde is als het eindpunt A' .

Omdat A en A' blijkbaar met hetzelfde punt in de rechte wereld corresponderen, zou Eschers procedure aan de punten A en A' dezelfde kleur moeten toekennen. In de litho is dit niet te zien, omdat A' in het witte gat valt. Als we een vierkant aflopen met zijden langer dan 7 komen we in hetzelfde punt A' uit.

Doen we dit nu voor een ander beginpunt P in plaats van A , dan zien we dat een wandeling over een voldoende groot vierkant ons voert naar een punt P' . Kiezen we P op de roosterlijnen AB , BC , CD , DA , dan zal P' op de rand van het binnenste witte vierkantje in het rooster liggen. We krijgen P' steeds uit P door om het midden te draaien over zo'n 160 graden, en met een factor van ongeveer 20 te verkleinen. Dit is de verborgen symmetrie in de Prentententoonstelling—het is een Droste-effect waarbij we niet alleen schalen maar ook

draaien. Voor de schaalfactor en de hoek kennen we in dit stadium alleen een grove waarde, gemeten uit Eschers rooster.

Conforme poolcoördinaten

We weten nu dat de rechte wereld en de kromme wereld elk hun eigen soort Droste-effect hebben, en we hebben Eschers rooster om te zien welke punten in de rechte en in de kromme wereld met elkaar corresponderen. Maar hoe komt Eschers rooster aan zijn vorm? Volgens Escher was zijn rooster zo gekozen dat de kleine vierkantjes in de rechte wereld ook vierkantjes bleven in de kromme wereld. In wiskundige termen betekent dit dat de transformatie tussen de kromme en de rechte wereld *conform* is.

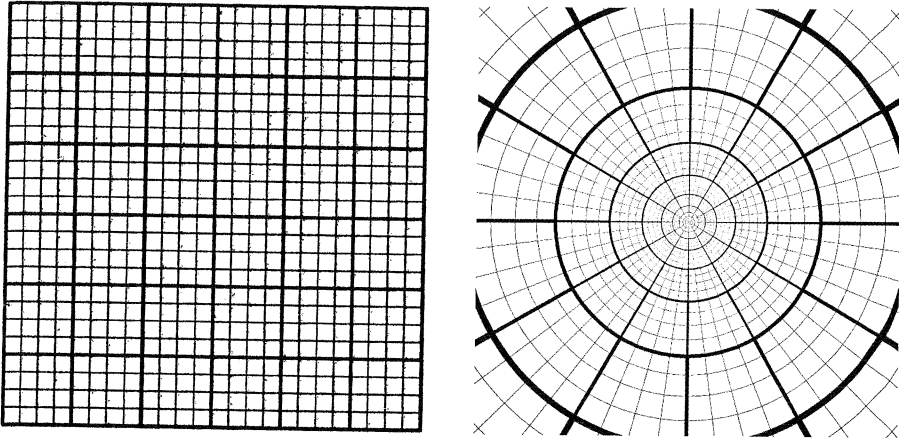
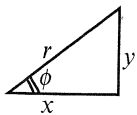


Fig. 7. Conforme poolcoördinaten

Het is nu handig om over te gaan op *conforme poolcoördinaten*. We zijn gewend om een punt P in het vlak aan te geven met een paar (x, y) van reële getallen. De gebruikelijke poolcoördinaten (r, ϕ) van dit punt krijgt men door voor r de afstand tot de oorsprong te nemen, en ϕ gelijk aan de hoek waaronder het punt P vanuit de oorsprong gezien wordt.



Men heeft dus $x = r \cos \phi$ en $y = r \sin \phi$. Merk op dat poolcoördinaten van een punt niet uniek zijn: de hoek ϕ is alleen maar bepaald op veelvouden van 360 graden na.

Met twee kleine ingrepen is deze coördinatentransformatie conform te maken: we moeten de hoek niet in graden meten, maar in radialen (dus 360 graden is 2π radialen), en we moeten de afstand van P tot de oorsprong door zijn natuurlijke logaritme vervangen. Met andere woorden, de transformatie

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad f(l, \phi) = (e^l \cos \phi, e^l \sin \phi)$$

is conform. Voor wie complexe getallen kent: dit is de complexe exponentiële functie $z \rightarrow e^z$. De conforme poolcoördinaten van het punt (x, y) zijn nu gegeven door (l, ϕ) waarbij $l = \log r$. De functie f is in Figuur 7 uitgebeeld. De kleine vierkantjes links hebben afmeting $\pi/24 \times \pi/24$, en de dikke cirkels in het rechterplaatje liggen steeds een schaalfactor $e^{\pi/6} = 1,68809179 \dots$ uit elkaar.

Gegeven een plaatje in het x, y -vlak, kunnen we nu het corresponderende "logarithmische" plaatje in het l, ϕ -vlak maken door het punt (l, ϕ) de kleur te geven van het punt $(x, y) = f(l, \phi)$ in het oorspronkelijke plaatje. In Figuur 7 staat links het logarithmische plaatje van het plaatje rechts.

Zo'n logaritmisch plaatje gaat bij een verticale opschuiving over een afstand 2π altijd in zichzelf over, want er geldt $f(l, \phi + 2\pi) = f(l, \phi) = (x, y)$. Als het oorspronkelijke plaatje in zichzelf overgaat bij gelijktijdige draaiing over een hoek van ϕ_0 radialen en schaling met een factor r_0 , dan gaat het logaritmische plaatje ook nog in zichzelf over als men over de vector $(\log r_0, \phi_0)$ opschuift. Hiernaast is dat te zien aan de logaritmische versie van het bekende Droste-plaatje: het plaatje herhaalt zichzelf niet alleen als men verticaal een afstand van 2π aflegt, maar ook als men horizontaal een afstand van ongeveer 1,8 aflegt.

We kunnen nu de logaritmische plaatjes maken die horen bij Eschers rechte wereld en zijn kromme wereld. Dat geeft twee behangpatronen, elk waarvan zich in twee verschillende richtingen herhaalt. Beide gaan namelijk bij opschuiving over de vector $(0, 2\pi)$ in zichzelf over, en bovendien gaat de eerste bij opschuiving over $(\log 256, 0)$ en de tweede bij opschuiving over $(\log r_0, \phi_0)$ in zichzelf over; hier is ϕ_0 ongeveer $160\pi/180$, en r_0 is ongeveer 20.

Het rooster van Escher vertelt ons hoe we bij een punt in de kromme wereld het corresponderende punt in de rechte wereld moeten vinden. We kunnen dat recept naar de logaritmische wereld overplanten, en het geeft ons een conforme transformatie $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ met de eigenschap dat $f(h(l, \phi))$ het punt in de rechte wereld is dat hoort bij het punt $f(l, \phi)$ in de kromme wereld. Volgens een stelling uit de complexe functietheorie is er weinig keus voor h : als we de oorsprong zo kiezen dat $h(0, 0) = (0, 0)$, dan moet h een schaling gevolgd door een draaiing zijn.

Uitgedrukt in conforme poolcoördinaten is de ingewikkelde transformatie die men uit Eschers rooster krijgt, dus niets anders dan een combinatie van een schaling en een draaiing. Dat is een krachtig resultaat, en het stelt ons in staat om zowel de transformatie h als het paar $(\log r_0, \phi_0)$ te bepalen.

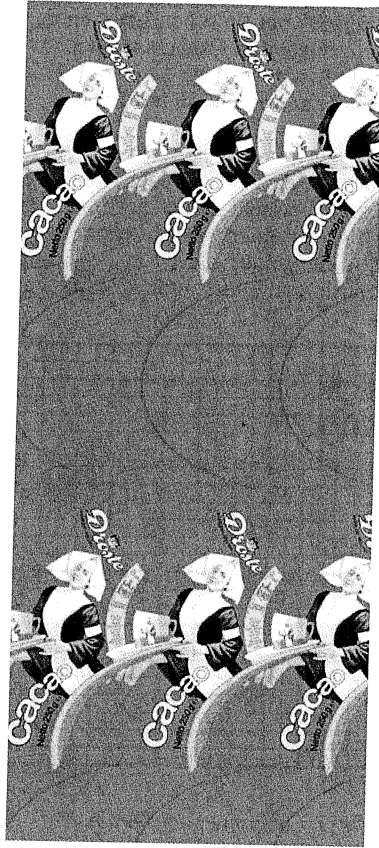
Laten we bijvoorbeeld kijken waar de wandeling ABCDA op het kromme rooster mee correspondeert in de logaritmische plaatjes van de rechte en de kromme wereld. Als $A = f(P)$, en we volgen het pad vanaf het punt P van \mathbb{R}^2 in conforme poolcoördinaten, dan zijn we aan het eind van de wandeling bij $P + (0, 2\pi)$. Maar als we het pad in de rechte wereld volgens Figuur 5 vanaf $h(P)$ volgen, dan komen we uit bij $h(P) + (\log 256, 2\pi)$. Omdat h slechts een schaling gecombineerd met een draaiing is, moet nu gelden $h(0, 2\pi) = (\log 256, 2\pi)$, waaruit we de hoek en de schaalfactor van h kunnen aflezen. Een vergelijkbaar argument met de tweede wandeling uit Figuur 6 levert $h(-\log r_0, 2\pi - \phi_0) = (0, 2\pi)$, en omdat h nu bekend is kunnen we daarmee de hoek ϕ_0 en de schaalfactor r_0 van de verborgen symmetrie in de Prentententoonstelling bepalen: na wat rekenwerk blijkt de schaalfactor

$$r_0 = e^{4\pi^2(\log 256)/(4\pi^2 + (\log 256)^2)} = 22,583684528618492 \dots$$

te zijn, en de hoek

$$2\pi(\log 256)^2/(4\pi^2 + (\log 256)^2)$$

radialen, wat correspondeert met $157,625596083230310 \dots$ graden.



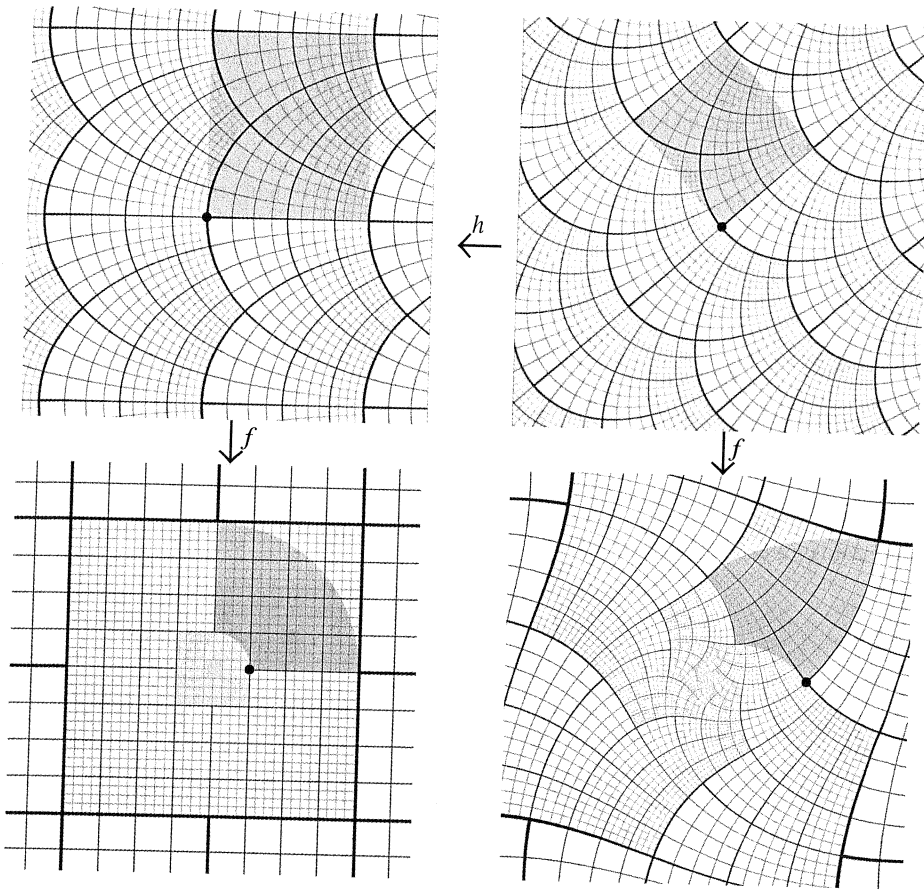


Fig. 8. Eschers transformatie in conforme poolcoördinaten

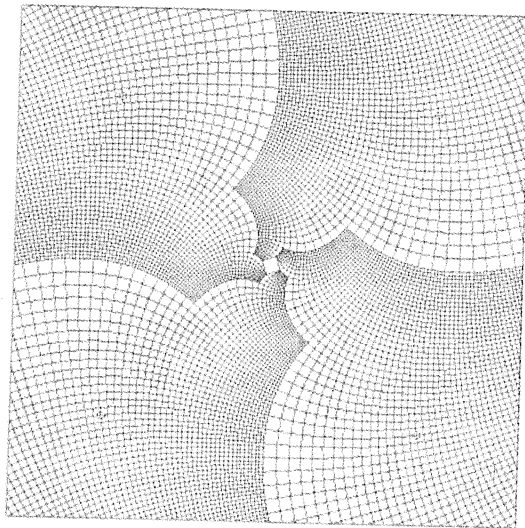


Fig. 9. Het conforme rooster

We concluderen dat de symmetrie-eisen en de eis dat Eschers rooster conform is, de situatie volledig vastleggen: er is geen keuze meer voor de factor r_0 en de hoek ϕ_0 . Het conforme rooster in Figuur 9, dat gemaakt is door Richard Groenewegen, voldoet aan deze ideale symmetrie. Het lijkt treffend veel op Eschers rooster in Figuur 3. Het kleine vierkantje middenin Figuur 9 is wat kleiner dan dat in Eschers rooster, hetgeen weerspiegelt dat de ideale waarde van r_0 wat groter uitvalt dan wat we in Figuur 3 hadden gemeten. Behangpatronen die op conforme equivalentie na bekeken worden, krijgen in de wiskunde het etiket "Riemannoppervlak van geslacht 1" of ook wel "elliptische kromme over de complexe getallen" opgeplakt. Deze elliptische krommen spelen een centrale rol in de hedendaagse wiskunde, en hebben onder andere in 1995 geleid tot een bewijs van de laatste stelling van Fermat.

De invulling van het gat

We hebben nu voldoende informatie om het gat in Eschers litho in te vullen. Joost Batenburg, destijds wiskunde-student in Leiden, heeft software geschreven waarmee men, uitgaande van een scan van Eschers rooster en een scan van de Prentententoonstelling, de door Escher gevolgde procedure in omgekeerde volgorde kan doorlopen. Op deze wijze krijgt men plaatjes van de rechte wereld die bij benadering recht zijn, zie Figuur 10. Het witte gat is nu een lege spiraal geworden.

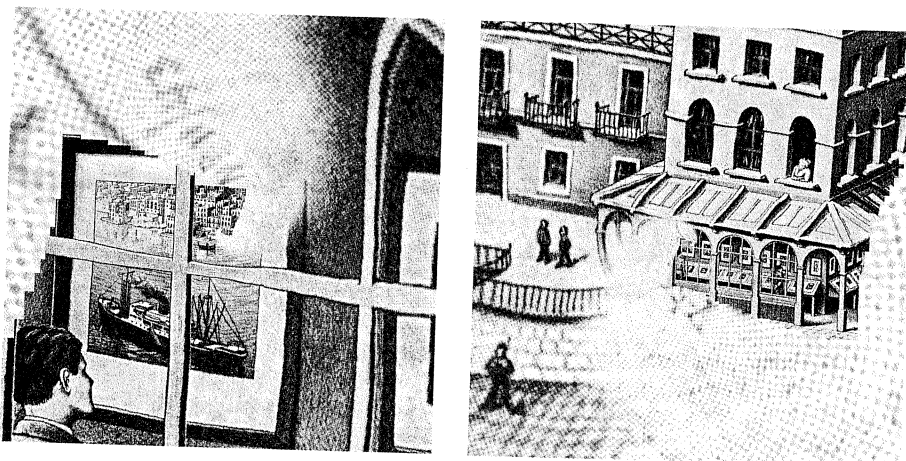


Fig. 10. De volgens Eschers eigen rooster rechtgetrokken litho. Het gat in de prent van Escher is hier een witte spiraal.

Uitgaande van deze rechtgetrokken Prentententoonstelling hebben tekenaars Hans Richter en Jacqueline Hofstra vier nieuwe rechte schetsen gemaakt (zie Figuur 11), waarin de spiraal is opgevuld en een aantal andere onvolkomenheden ook is weggewerkt. Om de pixel-dichtheid zowel in de rechte als in de kromme wereld schaalinvariant te maken, is nu eerst het corresponderende logaritmische plaatje gemaakt. Dit plaatje is vervolgens gedetailleerd van grijstinten voorzien door Jacqueline Hofstra, zie Figuur 12. Met behulp van een computerprogramma van Joost Batenburg is hiermee een ingevulde versie van de Prentententoonstelling gemaakt. Deze ziet men in Figuur 13, samen met twee vergrotingen die zichtbaar maken dat op de plaats van het gat inderdaad de hele prent weer schuilt.

Variaties van de prent en computeranimaties zijn te zien op de website escherdroste.math.leidenuniv.nl. Meer wiskundige details vindt men in een artikel dat ik met B. de Smit in de

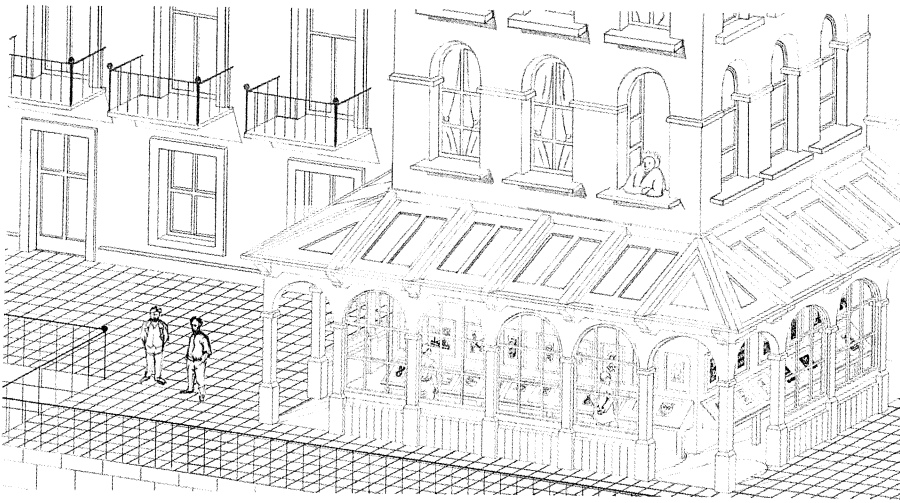


Fig. 11. Nieuwe schets

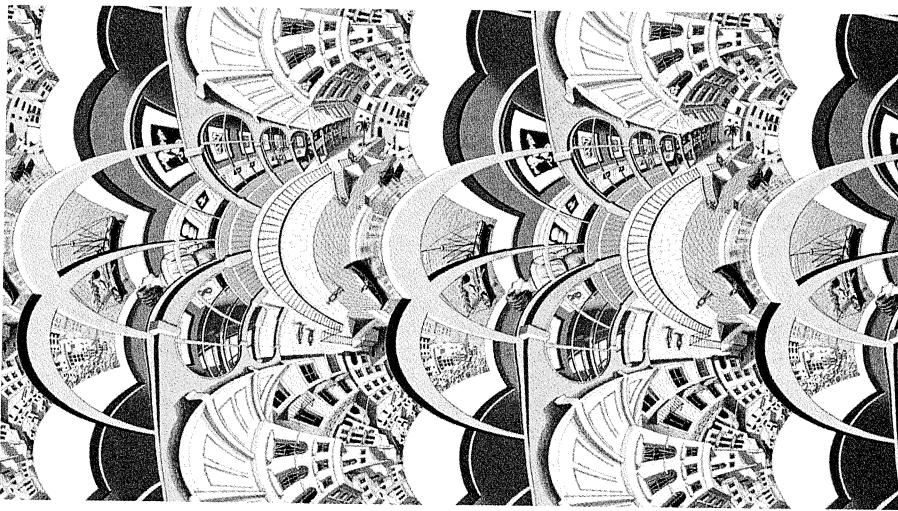
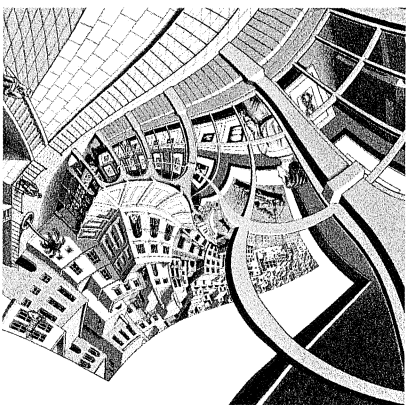
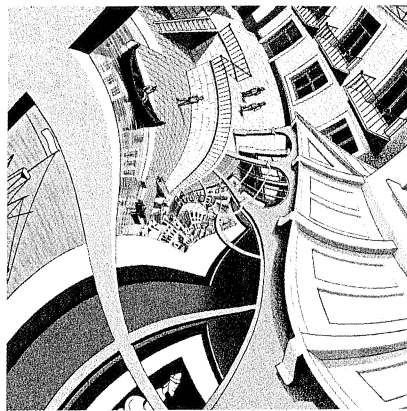
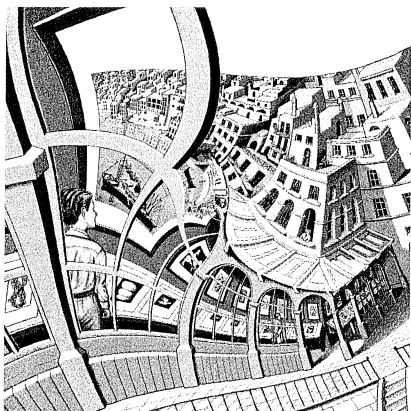


Fig. 12. De ingevulde logaritmische versie van Eschers prent, met een verticale herhaling over een afstand van 2π , en een horizontale herhaling over een afstand van $\log 256$.

Notices of the American Mathematical Society (April 2003) gepubliceerd heb: ams.org/notices/200304/fea-escher.pdf. Een artikel van Sara Robinson over het project in Leiden staat in SIAM News: siam.org/siamnews/10-02/escher.pdf. Veel informatie en werken van Escher zijn te vinden op de officiële M.C. Escher website: mcescher.nl. Een originele afdruk van de Prentententoonstelling is te zien in het museum "Escher in het Paleis" in Den Haag.



*Fig. 13. De gecompleteerde
prent, met vergrotingen van het
midden met een factor 4 en 16.*