ÉCOLE POLYTECHNIQUE
FÉDÉRALE DE LAUSANNE

EPFL - SMA Bachelor Semestre 6
Sous la direction de : Prof. Boris Buffoni

Lagrangiens Convexes et Théorie de Tonelli

Projet de semestre présenté par

David Ter-Borch Gram Schjoldager Lilienfeldt

3 juin 2014

Table des matières

Introduction

Le calcul des variations est un domaine de l'analyse fonctionnelle qui consiste en un ensemble de méthodes permettant de minimiser une fonctionnelle. Cette branche est née à la fin du $17^{\text{ème}}$ siècle avec les travaux de Fermat et de Huygens sur la propagation de la lumière. Le $18^{\text{ème}}$ siècle voit une multitude de méthodes variationnelles se développer avec les travaux de grand mathématiciens comme Euler, Gauss, Newton et Leibniz pour ne citer que quelques grands noms. En 1797, Lagrange rassemble les résultats obtenus dans *Théorie des fonctions analytiques*, où il donne la forme connue aujourd'hui de l'équation d'Euler-Lagrange. La branche s'est par la suite développée davantage durant le $19^{\text{ème}}$ et $20^{\text{ème}}$ siècles et est aujourd'hui un domaine de recherche très actif. Les domaines d'application de cette théorie sont variées : la géométrie différentielle, les problèmes d'isométrie et les domaines de la physique tels que la physique quantique ou encore la théorie de la relativité générale. Quasiment tous les grands mathématiciens du $17^{\text{ème}}$ au $20^{\text{ème}}$ siècle se sont intéressés aux problématiques abordées dans cette branche.

Dans le travail que nous présentons, nous traitons un cas particulier du problème de Lagrange que nous formulons maintenant. Soit M une variété différentiable quelconque sans bord et de dimension finie n. Notons TM son espace tangent total et écrivons (x, v) pour désigner un point de TM. Considérons une fonction continue $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ que nous appelons Lagrangien sur M. Si $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$ et $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ est une courbe de classe C^1 ou même C^1_{morc}, alors nous définissons l'action $\mathbb{L}(\gamma)$ de la courbe γ pour L par

$$\mathbb{L}(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))\, \mathrm{d}s.$$

Comme nous le verrons, la notion d'action de courbe pour le Lagrangien L peut être étendue aux courbes absolument continues.

Le problème posé par Tonelli est celui de minimiser l'action de courbe pour L au sein de la classe des courbes absolument continues de $[a, b]$ dans M avec extrémités fixes. Autrement dit, pour des points x et y de M donnés, existe-t-il une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ absolument continue avec $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$ telle que pour toute courbe $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow M$ absolument continue, avec $\gamma_1(a) = x$ et $\gamma_1(b) = y$, nous avons $\mathbb{L}(\gamma) \leq \mathbb{L}(\gamma_1)$?

Le but de ce travail est de comprendre et de prouver le théorème de Tonelli qui ce formule de la manière suivante :

Théorème (Tonelli)**.** *Soit M une variété connexe que nous munissons d'une métrique Riemannienne g complète. Soit $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangien de classe C^1 convexe dans les fibres, superlinéaire au-dessus des compacts de M et bornée par dessous par g. Alors pour tout $x, y \in M$ et tout $a < b \in \mathbb{R}$, il existe une courbe absolument continue $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ avec $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ qui est un minimiseur pour $C^{ac}([a, b], M)$.*

La premier chapitre fait l'objet d'introduction à certaines notions clefs nécessaires pour comprendre la suite. Dans un premier temps, nous énonçons et prouvons quelques propriétés bien connues concernant les fonctions convexes et les formes linéaires portantes. Ceci est complété par la résolution de certains exercices tirés de [Fa08]. Dans un second temps, nous introduisons la notion de fibré vectoriel et en profitons pour rappeler certaines propriétés de l'espace tangent total et l'espace cotangent total d'une variété. Nous terminons cette section en définissant la notion de métrique Riemannienne et en étudiant certaines des propriétés qui y sont attachées. Le lecteur à l'aise avec ces concepts est libre de sauter cette partie que nous qualifierons de préliminaire.

Le deuxième chapitre est divisé en deux parties. D'une part, nous étudions les courbes absolument continues et d'autre part les Lagrangiens sur une variété abstraite. Ce sont les deux concepts clefs pour aborder le théorème de Tonelli. Le but de ce travail est atteint à la fin de ce chapitre où nous prouvons le théorème de Tonelli.

Dans le troisième chapitre, nous dépassons le but primaire de ce projet et nous nous interrogeons sur la nature des minimiseurs obtenus. Pour ce faire, nous introduisons la notion de courbe extrémale pour le Lagrangien L donné. Ces courbes sont les points critiques de la fonctionnelle à minimiser et satisfont l'équation d'Euler-Lagrange. À travers l'étude des courbes extrémales, nous établissons que les minimiseurs de classes C^1_{morc} pour un Lagrangien sous certaines hypothèses et de classe C^r, $r \geq 2$, sont en réalité de classe C^r. Or, les minimiseurs de Tonelli sont absolument continues et donc nos résultats de régularité ne s'appliquent à priori pas à ceux-ci. Il se trouve qu'il est possible de montrer que les minimiseurs de Tonelli sont de classe C^1_{morc} et par conséquent de classe C^r.

Nous tentons d'être le plus rigoureux, précis et complet que possible dans l'intégralité de ce travail. Néanmoins, nous laissons de côté la preuve de certains résultats que nous supposons connus du lecteur ou dont la preuve ne présente pas de réel intérêt pour la suite et risquerait de nous écarter de notre but primaire. Les résultats que nous ne démontrons pas seront indiqués et une référence sera fournie pour le lecteur qui souhaiterait lire la preuve.

Les pré-requis pour une bonne compréhension de ce travail sont de bonnes bases en analyse, des connaissances sur les variétés différentiables et en analyse fonctionnelle ainsi que la théorie de la mesure. Des connaissances en topologie sont recommandées même si nous ne faisons pas usage de résultats profonds de topologie. Ce projet est principalement basé sur [Fa08].

Je tiens à remercier le Professeur Boris Buffoni de m'avoir donné l'opportunité de découvrir ce passionnant sujet. Je suis reconnaissant de sa patience, son temps, son aide et ses conseils et je le remercie de m'avoir guidé durant tout ce semestre.

1 Préliminaires : fonctions convexes et variétés

Dans un premier temps, nous introduisons les fonctions convexes et les formes linéaires portantes. Par la suite, nous abordons les fibrés vectoriels et les variétés Riemanniennes. Une étude plus profonde des fonctions convexes est possible mais nous avons décidé de sélectionner uniquement les résultats nécessaires en vue du théorème de Tonelli.

1.1 Généralités sur les fonctions convexes

Nous définissons les fonctions convexes et établissons certains résultats classiques d'analyse convexe. Nous complétons le tout par la résolution de quelques exercices tirés de [Fa08].

1.1.1 Définition et premiers résultats

Définition 1.1. Soit E un espace vectoriel et $U \subset E$ un sous-ensemble.

(i) Le sous-ensemble U est dit *convexe* si pour toute paire de points x et y dans U, le segment

$$[x, y] = \{(1-t)x + ty \mid t \in [0,1]\}$$

est contenu dans U.

(ii) Soit U un sous-ensemble convexe de E. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite *convexe* si elle satisfait la condition

$$\forall x, y \in U, \forall t \in [0,1], f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y).$$

(iii) Soit U un sous-ensemble convexe de E. Une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ est dite *strictement convexe* si elle satisfait la condition plus forte

$$\forall x, y \in U, x \neq y, \forall t \in]0,1[, f((1-t)x + ty) < (1-t)f(x) + tf(y).$$

Exemple 1.2. Les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définies par $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto |x|$ sont convexes. En revanche, la fonction $x \mapsto x^3$ n'est pas convexe.

Proposition 1.3. *Soit U un sous-ensemble ouvert convexe d'un espace vectoriel topologique et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. Alors un minimum local de f est un minimum global.*

Démonstration. Soit $x \in U$ un minimum local de la fonction f. Alors, par définition, pour tout $y \in U$ dans un voisinage suffisamment proche de x, $f(y) \geq f(x)$. Par conséquent, si $y \in U$, alors pour tout $t \in]0,1]$ suffisamment proche de 0,

$$f(x) \leq f((1-t)x + ty) \leq (1-t)f(x) + tf(y)$$

par convexité de f. Ainsi, $tf(x) \leq tf(y)$ pour t suffisamment proche de 0. En divisant, on obtient $f(x) \leq f(y)$ et puisque ceci vaut pour tout $y \in U$, le point x est un minimum global de f. $\square$

Théorème 1.4. *Soit U un sous-ensemble ouvert et convexe de l'espace vectoriel topologique E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe. S'il existe un sous-ensemble ouvert non vide V de U tel que $\sup_{x\in V} f(x) < +\infty$, alors la fonction f est continue.*

Démonstration. Commençons par montrer que pour tout $x \in U$, il existe un voisinage ouvert V_x de x contenu dans U tel $\sup_{y\in V_x} f(y) < +\infty$. Si x n'appartient pas à V, alors nous choisissons au hasard un point z de V. L'intersection L de la droite joignant x à z avec l'ouvert U est un segment ouvert contenant le segment compact $[x, z]$. Choisissons $y \in L \setminus [x, z]$ proche de x. Alors $x \in]y, z[$ et donc il existe $t_0 \in]0, 1[$ tel que $x = (1 - t_0)y + t_0 z$. Considérons alors l'application $H : E \longrightarrow E$ définie par

$$H(w) = (1 - t_0)y + t_0 w.$$

L'application H est un homéomorphisme de E dans E et $H(z) = x$. Il est clair que c'est une bijection puisque son inverse est donné par $H^{-1}(u) = (u - (1 - t_0)y)/t_0$. De plus, H est continue : si $B(w, \epsilon)$ est un ouvert de E, alors $H^{-1}(B(w, \epsilon)) = B(w - (1 - t_0)y, \epsilon/t_0)$ est aussi un ouvert de E. De même, H^{-1} est continue.

Par convexité de U, la restriction $H|_U$ est un homéomorphisme de U vers lui-même. L'image de V par H, que nous notons V_x, est un voisinage ouvert de x contenu dans U puisque $H(z) = x$ et H est ouverte. De plus, pour tout $x' \in V_x$, il existe $w \in V$ tel que $x' = (1 - t_0)y + t_0 w$ et ainsi, par convexité de f,

$$f(x') = f((1 - t_0)y + t_0 w) \leq (1 - t_0)f(y) + t_0 f(w) \leq (1 - t_0)f(y) + t_0 \sup_{w'\in V} f(w') < +\infty$$

et donc $\sup_{x'\in V_x} f(x') < +\infty$.

Montrons désormais la continuité de f. Quitte à translater tout le problème, nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $x = 0$. Soit V_0 un voisinage ouvert de 0 tel que $\sup_{y\in V_0} f(y) = M < +\infty$. Puisque E est un espace vectoriel topologique, l'application multiplication par un scalaire non nul est un homéomorphisme de E dans lui-même. Ainsi, il existe V_0' un ouvert tel que $tV_0' \subset V_0$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ avec $|t| < 1$. Soit $0 < \epsilon < 1$ et prenons $y \in (-\epsilon V_0') \cap (\epsilon V_0') \subset V_0$. Alors il existe x_-, x_+ dans V_0' tels que $y = -\epsilon x_- = \epsilon x_+$. Alors $y = (1 - \epsilon)0 + \epsilon x_+$ et donc par convexité $f(y) \leq (1 - \epsilon)f(0) + \epsilon f(x_+) \leq (1 - \epsilon)f(0) + \epsilon M$. Il s'ensuit que

$$\forall y \in (-\epsilon V_0') \cap (\epsilon V_0'), f(y) - f(0) \leq \epsilon(M - f(0)).$$

Mais nous avons aussi l'égalité $0 = (1 - \frac{1}{1+\epsilon})x_- + \frac{1}{1+\epsilon}y = \frac{\epsilon}{1+\epsilon}z_- + \frac{1}{1+\epsilon}y$ et donc par convexité $f(0) \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}f(z_-) + \frac{1}{1+\epsilon}f(y) \leq \frac{\epsilon}{1+\epsilon}M + \frac{1}{1+\epsilon}f(y)$. Il s'ensuit que

$$\forall y \in (-\epsilon V_0') \cap (\epsilon V_0'), f(0) - f(y) \leq \epsilon(M - f(0)).$$

Finalement, nous avons montré que

$$\forall y \in (-\epsilon V_0') \cap (\epsilon V_0'), |f(y) - f(0)| \leq \epsilon(M - f(0))$$

et donc f est continue en 0 car ϵ est arbitraire. Ceci montre que f est continue sur U. □

1.1.2 Formes linéaires portantes

Soit E un espace vectoriel réel. Nous noterons $E^* = \mathrm{Hom}(E, \mathbb{R})$ le dual algébrique de E. Un élément p de E^* est appelé forme linéaire et pour tout v dans E, nous noterons $p(v)$ l'image de v par p. Dans le cas d'un espace vectoriel topologique, nous notons E' son dual topologique, c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E.

Définition 1.5. Soit U un sous-ensemble de E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction définie sur U. Une forme linéaire $p \in E^*$ est appelée *forme linéaire portante* en $x_0 \in U$ pour la fonction f si

$$\forall x \in U, f(x) - f(x_0) \geq p(x - x_0).$$

On note $\mathrm{FLP}_{x_0}(f)$ l'ensemble des formes linéaires portantes en x_0 pour f.

Exemple 1.6. Considérons les fonctions $f : x \mapsto |x|$ et $g : x \mapsto x^3$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Alors $\mathrm{FLP}_0(f) = [-1, 1]$, $\mathrm{FLP}_x(f) = \{-1\}$ si $x < 0$ et $\mathrm{FLP}_x(f) = \{1\}$ si $x > 0$. En revanche, $\mathrm{FLP}_x(g) = \emptyset$.

Lemme 1.7. *Soit $p \in E^*$. Si $p(v) \geq 0$ pour tout $v \in E$, alors p est la forme nulle.*

Démonstration. Soit $v \in E$. Alors $p(v) \geq 0$, mais $p(v) = -p(-v)$ et puisque $-v \in E$, $p(-v) \geq 0$. Donc $p(v) = 0$ et ceci vaut pour tout $v \in E$. □

Proposition 1.8. *Soit U un sous-ensemble ouvert d'un espace vectoriel normé E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. Si f est différentiable en $x \in U$, alors $\mathrm{FLP}_x(f) \subset \{Df(x)\}$.*

Démonstration. Supposons que $\mathrm{FLP}_x(f) \neq \emptyset$ et soit $p \in \mathrm{FLP}_x(f)$. Fixons $v \in E$. Alors pour $t > 0$ suffisamment petit, $x + tv \in U$. Mais alors $f(x + tv) - f(x) \geq p(tv) = tp(v)$. En divisant par t et en prenant la limite lorsque t tend vers 0, nous voyons que $Df(x)(v) \geq p(v)$. Ainsi, la forme linéaire $Df(x) - p$ est positive et donc nulle par le lemme précédent. □

Nous n'avons pas encore discuté du lien entre convexité et formes linéaires portantes. Ce lien est illustré dans le théorème suivant, mais avant de l'énoncer nous avons besoin d'une version analogue du Théorème de Hahn-Banach.

Théorème 1.9. *Soit X un espace vectoriel topologique et soient A et B deux sous-ensembles de X que nous supposons disjoints, non vides et convexes. Si A est ouvert, alors il existe $F \in X'$ et $\gamma \in \mathbb{R}$ tel que $F(y) \geq \gamma > F(x)$ pour tout $x \in A$ et tout $y \in B$.*

Démonstration. Voir Théorème 3.4 (a) de [Ru91]. □

Théorème 1.10. *Soit U un sous-ensemble ouvert et convexe d'un espace vectoriel topologique E. Si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et convexe, alors en tout point de U il existe une forme linéaire portante.*

Démonstration. Considérons l'ensemble A défini par

$$A = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in U, f(x) < t\}.$$

Il s'agit de l'épigraphe de la fonction f. Cet ensemble est évidemment non vide et ouvert. De plus, il est convexe. Pour voir ceci, choisissons (x,t) et (y,s) deux points distincts dans A. Soit $\lambda \in [0,1]$ et considérons le point $z = \lambda(x,t) + (1-\lambda)(x,s) = (\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda t + (1-\lambda)s)$. Par convexité de U, $\lambda x + (1-\lambda)y \in U$ et par convexité de la fonction f, il vient

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y) < \lambda t + (1-\lambda)s.$$

Ainsi, $z \in A$ et donc A est convexe.

Fixons $x_0 \in U$. Alors $(x_0, f(x_0)) \notin U$ et nous pouvons appliquer Théorème 1.9 avec $B = \{(x_0, f(x_0))\}$ pour obtenir l'existence d'une forme linéaire continue $F : E \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

$$\forall (x,t) \in A, F(x_0, f(x_0)) > F(x,t).$$

Nous pouvons écrire $F(x,t) = p(x) + kt$ pour tout $(x,t) \in E \times \mathbb{R}$ avec $p \in E'$ et $k \in \mathbb{R}$. Dans l'inégalité précédente, nous avons en particulier que $F(x_0, f(x_0)) > F(x_0, t)$ pour tout $t > f(x_0)$ et donc $k(f(x_0) - t) > 0$. Il s'ensuit que $k < 0$. Pour tout $x \in U$ et tout $t \in \mathbb{R}$ avec $t > f(x)$, nous avons

$$F(x_0, f(x_0)) > F(x,t) \implies p(x_0) + kf(x_0) > p(x) + kt \implies k^{-1}p(x_0) + f(x_0) < k^{-1}p(x) + t,$$

où le changement de signe vient du fait que $k < 0$. Nous en déduisons que $t - f(x_0) > -k^{-1}p(x - x_0)$ pour tout $t > f(x)$ et donc $f(x) - f(x_0) \geq -k^{-1}p(x - x_0)$. Ainsi, $-k^{-1}p$ est la forme linéaire portante cherchée. □

Corollaire 1.11. *Soit U un sous-ensemble ouvert et convexe d'un espace vectoriel normé E et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et convexe. Si f est différentiable en $x_0 \in U$, alors $Df(x_0)$ est l'unique forme linéaire portante en x_0 pour f et en particulier nous avons*

$$\forall x \in U, f(x) - f(x_0) \geq Df(x_0)(x - x_0).$$

Démonstration. Puisque f est différentiable en x_0, nous avons par Proposition 1.8 que $\mathrm{FLP}_{x_0}(f) = \emptyset$ ou $\mathrm{FLP}_{x_0}(f) = \{Df(x_0)\}$. Par convexité de f, nous savons par Théorème 1.10 que $\mathrm{FLP}_{x_0}(f) \neq \emptyset$ et nous en déduisons $\mathrm{FLP}_{x_0}(f) = \{Df(x_0)\}$. □

1.1.3 Exercices

Nous résolvons quelques exercices proposés dans [Fa08].

Exercice 1. *Soit U un sous-ensemble ouvert et convexe d'un espace vectoriel normé E et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.*

(a) Montrer que f n'est pas strictement convexe si et seulement si il existe deux points distincts x et y de U tel que f soit affine sur le segment $[x, y]$.

(b) Montrer que si f est deux fois différentiable en tout point x de U, alors f est strictement convexe si et seulement si pour tout vecteur unitaire $v \in E$, l'ensemble $A_v = \{x \in U \mid D^2 f(x)(v, v) = 0\}$ ne contient pas de segment non trivial parallèle à v.

Solution. (a) Supposons qu'il existe deux points distincts x et y de U tel que f soit affine sur le segment $[x, y]$. Dit autrement, pour tout point z appartenant au segment $[x, y]$, $f(z) = a\ell(z) + b$, où a et b sont des scalaires réels et ℓ est une fonction linéaire de U dans $\mathbb{R}$. Fixons $z \in]x, y[$. Alors il existe $t \in]0, 1[$ tel que $z = (1 - t)x + ty$. Mais alors

$$\begin{aligned} f(z) = f((1-t)x + ty) = a\ell((1-t)x + ty) + b = a(1-t)\ell(x) + at\ell(y) + ((1-t) + t)b \\ = (1-t)(a\ell(y) + b) + t(a\ell(y) + b) = (1-t)f(x) + tf(y) \end{aligned}$$

et donc f n'est pas strictement convexe.

Pour la réciproque, supposons que f ne soit pas strictement convexe. Alors il existe deux points distincts x et y de U et $t_0 \in]0, 1[$ tel que

$$f((1 - t_0)x + t_0 y) = (1 - t_0)f(x) + t_0 f(y).$$

Posons $z = (1 - t_0)x + t_0 y$. Par convexité de f, nous avons, pour tout $t \in [0, 1]$, l'inégalité suivant

$$f((1 - t)x + tz) \leq (1 - t)f(x) + tf(z).$$

Si cette inégalité est une égalité pour pour tout t, alors f est affine sur le segment $[x, z]$ et nous avons gagné. Sinon, il existe $t_1 \in]0, 1[$ tel que $f((1-t_1)x+t_1 z) < (1-t_1)f(x)+t_1 f(z)$. Posons $z_1 = (1-t_1)x+t_1 z$. Il est clair que pour tout $t \in [0, 1[$, nous avons $(1-t)f(z_1)+tf(y) < (1-s)f(x)+sf(y)$ pour tout $s \in [0, 1]$ par choix de z_1. En particulier, en prenant $s = t_0$, nous obtenons

$$\forall t \in [0, 1[, (1 - t)f(z_1) + tf(y) < (1 - t_0)f(x) + t_0 f(y) = f(z)$$

et ceci contredit la convexité de f puisque $z \in [z_1, y[$. Donc f est affine sur $[x, z]$ (et en fait sur tout le segment $[x, y]$).

(b) Nous prouvons la contraposée, c'est-à-dire que nous montrons qu'il existe $v \in E$ unitaire tel que A_v contient un segment non trivial parallèle à v si et seulement si f n'est pas strictement convexe.

Supposons qu'il existe deux points distincts x et y de U tel que $[x,y] \subset A_{\frac{y-x}{\|y-x\|}}$. Posons $v = y - x$ et supposons sans perte de généralité que $\|v\| = 1$. Nous avons que pour tout $z \in [x,y]$, $D^2 f(z)(v,v) = 0$. Par la formule de Taylor,

$$f(y) = f(x) + Df(x)(v) + \int_0^1 (1-t)D^2 f((1-t)x + ty)(v,v)\,\mathrm{d}t.$$

Or, par hypothèse, $D^2 f((1-t)x+ty)(v,v) = 0$ pour tout $t \in [0,1]$ et ainsi, $Df(x)(v) = f(y) - f(x)$. De plus,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2}Df(x)(v) + \frac{1}{4}\int_0^1 (1-t)D^2 f\left(\left(1-\frac{t}{2}\right)x + \frac{t}{2}y\right)(v,v)\,\mathrm{d}t$$

et puisque $\left(1-\frac{t}{2}\right)x + \frac{t}{2}y \in [x,y]$ pour tout $t \in [0,1]$, $D^2 f\left(\left(1-\frac{t}{2}\right)x + \frac{t}{2}y\right)(v,v) = 0$ et ainsi,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = f(x) + \frac{1}{2}Df(x)(v) = f(x) + \frac{1}{2}(f(y) - f(x)) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$$

et il s'ensuit que f n'est pas strictement convexe.

Supposons que f ne soit pas strictement convexe. Alors, par le point (a), il existe deux points distincts x et y de U tel que f soit affine sur le segment $[x,y]$. Il s'ensuit que $D^2 f(z)$ est la forme nulle pour tout $z \in]x,y[$. Si z_1, z_2 appartiennent au segment $]x,y[$ avec $z_1 < z_2$, alors $[z_1, z_2] \subset A_{\frac{z_2-z_1}{\|z_2-z_1\|}}$.

1.12. On déduit du point (b) que si $D^2 f(x)$ est définie positive en tant que forme quadratique pour tout $x \in U$ et que l'ensemble des points x où $D^2 f(x)$ n'est pas de rang maximal ne contient aucune droite non triviale, alors f est strictement convexe.

Exercice 2. *Soit U un sous-ensemble ouvert de l'espace de Banach E. Montrer que si $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction convexe et semi-continue inférieurement, alors f est continue.*

Solution. Considérons la suite croissante d'ensemble définie, pour $n \in \mathbb{N}$, par

$$C_n = \{x \in U \mid f(x) \le n\}.$$

Remarquons que $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ et que pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble C_n est fermé dans U. En effet, soit (x_m) une suite de points dans C_n qui converge vers un certain $x \in U$. Alors pour tout $m \in \mathbb{N}$, nous avons $f(x_m) \le n$. Par semi-continuité inférieure de f, $\liminf_{m\to\infty} f(x_m) \ge f(x)$ et par conséquent $f(x) \le n$. Il s'ensuit que C_n est séquentiellement fermé et donc fermé. Ce raisonnement vaut pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrons qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que C_n soit d'intérieur non vide. Supposons, par l'absurde, que ce n'est pas le cas. Alors U est égal à l'union dénombrable d'une famille d'ensembles fermés dont aucun ne contient de boule. Par conséquent, U est un ensemble maigre. Soit $\overline{B}$ une boule fermée contenue dans U. Alors

$$\overline{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{B} \cap C_n$$

et pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'intersection $\overline{B} \cap C_n$ est fermée et ne contient toujours pas de boules. Donc $\overline{B}$ est maigre. Or, $\overline{B}$ est un espace de Banach en tant que sous-espace fermé d'un espace de Banach et donc le théorème de Baire contredit cette égalité. Ainsi, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que l'intérieur V de C_n ne soit pas vide.

Nous avons donc trouvé un sous-ensemble non vide et ouvert V de U et $n \in \mathbb{N}$ tels que $\sup_{x\in V} f(x) \leq n < +\infty$ et donc par convexité de f nous pouvons appliquer Théorème 1.4 pour conclure que f est continue.

Exercice 3. *Soit U un sous-ensemble ouvert de l'espace vectoriel normé E et soit $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction localement bornée.*

(a) Montrer que pour tout $x \in U$, il existe une constante positive K et un voisinage $V \subset U$ de x tels que pour tout $y \in V$ et tout $p \in \mathrm{FLP}_y(f)$, $\|p\| \leq K$.

(b) Supposons que E soit de dimension finie et que f soit continue. Montrer que pour tout $x \in U$ et tout voisinage W de $\mathrm{FLP}_x(f)$ dans $E^* = E'$, il existe un voisinage $O \subset U$ de x tel que pour tout $y \in V$, $\mathrm{FLP}_y(f) \subset W$.

Solution. (a) Soit $x \in U$. Puisque f est localement bornée, il existe $r > 0$ tel que $f(y)$ est bornée en valeur absolue pour tout $y \in \overline{B}(x, r)$. Posons $M := \sup_{y\in\overline{B}(x,r)} |f(y)| < +\infty$. Fixons $y \in \overline{B}(x, r/2)$ et prenons $p \in \mathrm{FLP}_y(f)$. Pour $h \in \overline{B}(0, r/2)$ nous avons par définition d'une forme linéaire portante, $f(y + h) - f(y) \geq p(h)$. En prenant le suprémum sur tout les vecteurs h avec $\|h\| = r/2$ nous obtenons $\|p\| \leq \frac{4M}{r}$. Ainsi, $K = \frac{4M}{r}$ est la constante cherchée.

(b) Soit $x \in U$ et W un voisinage de $FLP_x(f)$. Supposons, par l'absurde, qu'il n'existe aucun voisinage $O \subset U$ de x tel que pour tout $y \in O$, $\mathrm{FLP}_y(f) \subset W$. Par le point (a), il existe une constante positive K et un voisinage V de x tel que pour tout $y \in V$, $FLP_y(f) \subset \overline{B}(0, K)$. Soit (x_n) une suite dans V qui converge vers x et considérons une suite de formes linéaires portantes (p_n) qui est telle que $p_n \in FLP_{x_n}(f)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|p_n\| \leq K$ et puisque E est de dimension finie, il existe une sous-suite (p_{n_k}) qui converge. Soit p la limite de cette sous-suite. Par définition des formes linéaires portantes, nous avons pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\forall y \in U, f(y) - f(x_{n_k}) \geq p_{n_k}(y - x_{n_k}).$$

En prenant la limite lorsque $k \to +\infty$, par continuité de f et de chaque p_{n_k} (car E est de dimension finie et par conséquent $E^* = E'$), nous obtenons

$$\forall y \in U, f(y) - f(x) \geq p(y - x)$$

et ainsi $p \in FLP_x(f)$. Ceci est en contradiction avec l'hypothèse qu'il n'existe aucun voisinage $O \subset U$ de x tel que pour tout $y \in O$, $\mathrm{FLP}_y(f) \subset W$.

Exercice 4. *Soit U un sous-ensemble ouvert et convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe et continue. Soit $x_0 \in U$ fixé et supposons que $\mathrm{FLP}_{x_0}(f) = \{p_0\}$. Montrer que $Df(x_0)$ existe et est égal à p_0.*

Solution. Commençons par remarquer que par Théorème 1.10 nous savons qu'en tout point de U la fonction f admet une forme linéaire portante. Considérons $x \in U \setminus \{x_0\}$ et prenons $p_x \in \mathrm{FLP}_x(f)$. Par définition, nous avons d'une part $f(x) - f(x_0) \geq p_0(x - x_0)$ et d'autre part $f(x_0) - f(x) \geq p_x(x_0 - x)$, d'où $f(x) - f(x_0) \leq p_x(x - x_0)$ par linéarité de p_x. Ainsi, pour tout $x \in U \setminus \{x_0\}$, nous avons

$$p_0(x - x_0) \leq f(x) - f(x_0) \leq p_x(x - x_0).$$

Soit $r > 0$ arbitraire. Puisque $\mathrm{FLP}_{x_0}(f) = \{p_0\}$, nous avons $\mathrm{FLP}_{x_0}(f) \subset B(p_0, r)$. Par le point ($b$) de l'exercice 3, il existe $\epsilon(r) > 0$ tel que pour tout $x \in B(x_0, \epsilon(r))$, $\mathrm{FLP}_x(f) \subset B(p_0, r)$. Ainsi, pour tout $x \in B(x_0, \epsilon(r))$, $\|p_x - p_0\| \leq r$ et

$$p_0 \leq \lim_{\epsilon(r)\to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq \lim_{\epsilon(r)\to 0} p_x = p_0$$

puisque $\epsilon(r) \to 0$ si et seulement si $r \to 0$. Cette inégalité est donc une égalité et par conséquent $Df(x_0)$ existe et est égal à p_0.

1.2 Fibrés vectoriels et fibrés tangents

Après une introduction brève de la notion de fibré vectoriel et quelques exemples, nous nous orientons vers le cadre particulier qui nous intéresse en vue du théorème de Tonelli, c'est-à-dire les fibrés tangents de variétés différentiables. Il est essentiel de comprendre ces objets qui sont étroitement liés à la théorie de Tonelli qui traite de fonctions définies sur ces fibrés. Nous aborderons ensuite la notion de métrique Riemannienne sur une variété et nous finirons par énoncer et démontrer deux résultats importants pour la suite.

1.2.1 Définition et exemples

Nous commençons par définir les fibrés de manière générale et verrons ensuite les fibrés vectoriels. Nous travaillerons uniquement avec des fibrés différentiables (C^∞).

Définition 1.13. Soient E, M et F des variétés différentiables et $\pi : E \longrightarrow M$ une application de classe C^∞. Le quadruplet (E, π, M, F) est appelé *fibré (localement trivial)* de classe C^∞ si pour tout $x \in M$, il existe un voisinage ouvert U de x et un C^∞-difféomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times F$ tels que $\pi|_{\pi^{-1}(U)} = \mathrm{pr}_1 \circ \phi$, où pr_1 est la projection sur la première coordonnée.

Définition 1.14. Si (E, π, M, F) est un fibré différentiable, alors E, M et F sont respectivement appelés *espace total*, *espace de base* et *fibre typique* du fibré. Pour tout $x \in M$, $E_x = \pi^{-1}(x)$ est appelé *fibre en* x.

Par commodité, nous noterons simplement $\pi : E \longrightarrow M$ pour le fibré (E, π, M, F). Les applications ϕ dans la définition de fibré sont appelées *trivialisations locales*. Il est clair que ϕ peut s'écrire sous la forme $\phi = (\pi|_{\pi^{-1}(U)}, \eta)$ où η est une application de classe C^∞ de $\pi^{-1}(U)$ vers F telle que $\eta|_{E_x} : E_x \longrightarrow F$ est un difféomorphisme. Une paire (ϕ, U) est appelée une carte du fibré.

Avant de voir quelques exemples de fibrés nous définissons les fibrés vectoriels qui sont l'objet d'intérêt de cette section.

Définition 1.15. Un fibré $(E, \pi, M, \mathbb{R}^n)$ est appelé *fibré vectoriel réel localement trivial de dimension finie* n si il satisfait les trois conditions suivantes :

(i) Pour tout $x \in M$, la fibre E_x admet une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel isomorphe à $\mathbb{R}^n$;

(ii) Pour tout $x \in M$, il existe une carte (ϕ, U) du fibré tel que $x \in U$ et l'application $\eta|_{E_x}$: $E_x \longrightarrow \mathbb{R}^n$ soit un isomorphisme d'espaces vectoriels, où $\phi = (\pi|_{\pi^{-1}(U)}, \eta)$.

Si $\pi : E \longrightarrow M$ est un fibré vectoriel, alors un point de E sera noté (x, v) où $x \in M$ et $v \in E_x$. Si il existe une trivialisation globale nous dirons que le fibré est trivial et nous pouvons alors identifier $E = M \times \mathbb{R}^n$. La projection de fibre n'est alors autre que la projection sur la première coordonnée.

Nous donnons trois exemples de fibrés vectoriels localement triviaux de dimension finie pour mieux comprendre cette notion abstraite. Nous en profitons pour rappeler les concepts de fibrés tangent et cotangent d'une variété.

Exemple 1.16. Considérer le Ruban de Möbius, noté RM, comme étant le quotient de $[0, 1] \times \mathbb{R}$ par la relation d'équivalence $(0, x) \sim (1, -x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Considérer aussi le cercle S^1 comme étant le quotient de $[0, 1]$ par la relation $0 \sim 1$. Définissons l'application $\pi : RM \longrightarrow S^1$ par $\pi([t, x]) = [t] = t$ pour tout $0 < t < 1$ et $\pi([0, x]) = [0] = [1] = \pi([1, x])$. Alors $(RM, \pi, S^1, \mathbb{R})$ est un fibré vectoriel localement trivial de dimension 1. Le fibré n'est pas trivial car le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ n'est pas difféomorphe au Ruban de Möbius puisque l'un est orientable alors que l'autre ne l'est pas.

Exemple 1.17. Soit M une variété différentiable de dimension n. Considérons le fibré tangent $(TM, \pi, M, \mathbb{R}^n)$. Nous rappelons que l'espace tangent total $TM = \bigsqcup_{x \in M} T_xM$ est une variété C^∞-différentiable et l'application $\pi : TM \longrightarrow M$ est donnée par $\pi(x, v) = x$. Les fibres $\pi^{-1}(x) = T_xM$ ont une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et nous pouvons expliciter une base localement. Soit pour cela (ϕ, U) une carte locale de M avec coordonnées locales $(x_1, \ldots, x_n)$ et tel que $x \in U$,. Alors une base de T_xM est donnée par $(\frac{\partial}{\partial x_1}|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}|_x)$, où $\frac{\partial f}{\partial x_i}|_x = \frac{\partial}{\partial x_i}(f \circ \phi^{-1})(\phi(x))$ pour une fonction différentiable $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$.

Pour voir que le fibré tangent est bien un exemple de fibré vectoriel localement trivial de dimension finie, nous nous donnons une structure différentiable $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ sur M. Soient V_α des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $\psi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ soit un difféomorphisme pour tout $\alpha \in A$. Noter que $\pi^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{x\in U_\alpha} T_xM$. Nous définissons, pour tout $\alpha \in A$, les applications suivantes :

$$\phi_\alpha : \bigsqcup_{x\in U_\alpha} T_xM \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^n \quad : \quad (x,v) \longmapsto (x, d(\psi_\alpha)_x(v)),$$

où $d(\psi_\alpha)_x : T_xM \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dénote la différentielle de ψ au point x. Il est aisé de voir que l'inverse de l'application ϕ_α est donné par

$$\phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \bigsqcup_{x\in U_\alpha} T_xM \quad : \quad (x,v) \longmapsto (x, d(\psi_\alpha^{-1})_{\psi_\alpha(x)}(v)).$$

Ainsi, l'application ϕ_α est bien un difféomorphisme. Nous vérifions facilement que $\mathrm{pr}_1 \circ \phi_\alpha = \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$ et par conséquent les applications ϕ_α sont des trivialisations locales du fibré tangent. Comme nous l'avons déjà remarqué plus haut, chaque fibre T_xM à une structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n et il est facile de voir que pour chaque $x \in M$, l'application de T_xM dans $\mathbb{R}^n$ qui envoie v sur $d(\psi_\alpha)_x(v)$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Ainsi, le fibré tangent est bien un fibré vectoriel localement trivial de dimension finie égale à n.

Si $M = U$ est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, alors nous pouvons identifier directement $T_xU = \mathbb{R}^n$ pour tout $x \in U$. Alors $TU = U \times \mathbb{R}^n$ et le fibré tangent est trivial.

Exemple 1.18. Soit M une variété différentiable de dimension n. Nous allons construire le fibré dual du fibré tangent $\pi : TM \longrightarrow M$ de M. Ceci est aussi un fibré vectoriel localement trivial de dimension finie appelé le fibré cotangent de M.

Pour chaque point x de M, nous identifions de manière naturelle l'espace cotangent T_x^*M au dual de l'espace tangent de M en x. Ainsi, un élément L de T_x^*M sera vu comme une fonctionnelle linéaire de T_xM dans $\mathbb{R}$. L'espace cotangent forme un $\mathbb{R}$-espace vectoriel muni de l'addition et de la multiplication de fonctionnelles linéaires. Le fibré cotangent total T^*M est alors défini comme étant l'union disjointe des espaces cotangents, c'est-à-dire $T^*M = \bigsqcup_{x\in M} T_x^*M$. Puisque chaque espace tangent T_xM est isomorphe à $\mathbb{R}^n$, nous avons un isomorphisme naturel entre T_x^*M et $\mathbb{R}^{n*}$. Le fibré cotangent est le quadruplet $(T^*M, \pi^*, M, \mathbb{R}^{n*})$, où $\pi^* : T^*M \longrightarrow M$ est la projection définie par $\pi^*(x, L) = x$. Noter que T^*M est aussi muni d'une structure de variété différentiable (voir Chapitre 11 de [Le03]).

La démarche pour montrer que le fibré cotangent est un fibré vectoriel est analogue à celle suivie pour le fibré tangent. Munissons M d'une structure différentiable $\{(\psi_\alpha, U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ et soient V_α des ouverts de $\mathbb{R}^n$ tels que $\psi_\alpha : U_\alpha \longrightarrow V_\alpha$ soit un difféomorphisme pour tout $\alpha \in A$. Noter que $(\pi^*)^{-1}(U_\alpha) = \bigsqcup_{x\in U_\alpha} T_x^*M$. Définissons, pour tout $\alpha \in A$, les applications

$$\phi_\alpha : \bigsqcup_{x\in U_\alpha} T_x^*M \longrightarrow U_\alpha \times \mathbb{R}^{n*} \quad : \quad (x, L) \longmapsto (x, L \circ d(\psi_\alpha^{-1})_{\psi_\alpha(x)}).$$

L'inverse de cette application est donnée par

$$\phi_\alpha^{-1} : U_\alpha \times \mathbb{R}^{n*} \longrightarrow \bigsqcup_{x \in U_\alpha} T_x^* M \quad : \quad (x, L) \longmapsto (x, L \circ d(\psi_\alpha)_x).$$

Il est clair que ϕ_α est un difféomorphisme et nous vérifions aisément que $\mathrm{pr}_1 \circ \phi_\alpha = \pi|_{\pi^{-1}(U_\alpha)}$. Ainsi, les applications ϕ_α sont des trivialisations locales. Finalement, pour tout $x \in M$, l'application de T_x^*M dans $\mathbb{R}^n$ qui envoie $L \in T_x^*M$ sur $L \circ d(\psi_\alpha^{-1})_{\psi_\alpha(x)})$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels. Ainsi, le fibré cotangent $(T^*M, \pi^*, M, \mathbb{R}^{n*})$ est bien un fibré vectoriel localement trivial de dimension finie égale à n.

1.2.2 Métrique Riemannienne

Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement aux fibrés tangents et cotangents d'une variété M. Avant de pouvoir travailler sur ces fibrés et définir des fonctions dessus, il nous faut définir une métrique sur M. Les résultats de cette section proviennent de [Jo02] Section 1.4.

Définition 1.19. Une *métrique Riemannienne* sur un variété M est une application g qui à tout point $x \in M$ assigne un produit scalaire $g_x = \langle \cdot, \cdot \rangle_x : T_xM \times T_xM \longrightarrow \mathbb{R}$ qui varie de manière lisse en fonction de x dans le sens suivant : pour tous champs de vecteurs différentiables $X, Y : M \longrightarrow TM$, la fonction

$$M \ni x \longmapsto \langle X_x, Y_x \rangle_x \in \mathbb{R}$$

est différentiable. Le couple (M, g) est appelé *variété Riemannienne.*

Nous exprimons g en coordonnées locales sur M. Soit $x \in M$ et soit $(x_1, \ldots, x_n)$ un système de coordonnées sur M dans un voisinage de x. Alors l'espace tangent T_xM admet $(\frac{\partial}{\partial x_1}\big|_x, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n}\big|_x)$ comme base canonique. Supposons que

$$X_x = \sum_{i=1}^{n} v_i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x \quad \text{et} \quad Y_x = \sum_{i=1}^{n} w_i(x) \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x$$

avec $v_i, w_i \in C^\infty(M)$. Alors par bilinéarité du produit scalaire,

$$\langle X_x, Y_x \rangle_x = \sum_{i,j=1}^{n} v_i(x) w_j(x) \left\langle \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_x, \left.\frac{\partial}{\partial x_j}\right|_x \right\rangle_x .$$

En posant $g_{ij}(x) = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}\big|_x, \frac{\partial}{\partial x_j}\big|_x \rangle_x$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$ et en définissant la matrice $G := (gij)_{1 \leq i,j \leq n}$, nous pouvons écrire

$$\langle X_x, Y_x \rangle_x = v(x)^t G(x) w(x),$$

où $v = (v_i)_{1 \leq i \leq n}$ et $w = (w_i)_{1 \leq i \leq n}$. Ainsi, pour pouvoir parler de métrique Riemannienne, il faut et il suffit que les fonctions g_{ij} soient différentiables. Ces fonctions sont appelées *représentations locales* *de la métrique Riemannienne* dans le système de coordonnées en question. Noter que puisque le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_x$ est symétrique et défini positif, la matrice G est définie positive (et donc inversible) et $g_{ij} = g_{ji}$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$.

Pour tout $x \in M$, on appelle longueur de $v \in T_xM$, le réel positif donné par $\|v\|_x = \sqrt{g_x(v,v)}$. Nous définissons la longueur d'une courbe $\gamma \in C^\infty_{\text{morc}}([a,b], M)$ par

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(s)\|_{\gamma(s)} \, \mathrm{d}s.$$

Finalement, nous appelons *distance Riemannienne* sur M la fonction $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ définie pour tout $x, y \in M$ par

$$d(x,y) = \inf \ell(\gamma),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des courbes γ de classe C^∞ par morceaux qui ont pour extrémités x et y.

Exemple 1.20. Prenons l'exemple où $M = \mathbb{R}^n$. Alors T_xM s'identifie avec $\mathbb{R}^n$ en identifiant les bases $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x_n})$ et $(e_1, \ldots, e_n)$, où $e_i = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$. Alors $g_{ij} = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$. Donc la métrique Riemannienne n'est autre que la métrique Euclidienne.

Proposition 1.21. *Si M est connexe, alors la distance Riemannienne est bien définie et est un distance sur M.*

Démonstration. Soit x un point de M et considérons l'ensemble défini par

$$E_x := \{y \in M \mid \exists \gamma \in C^\infty_{\text{morc}}([a,b], M), \gamma(a) = x, \gamma(b) = y\}.$$

Soit y un point de cet ensemble et soit $\gamma \in C^\infty_{\text{morc}}([a,b], M)$ une courbe qui relie x à y. Soit U un domaine de carte locale en y et $\phi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ le difféomorphisme associé. Choisissons $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $D_\epsilon(\phi(y)) \subset V$. Nous pouvons alors construire une courbe γ' reliant $\phi(y)$ à z pour tous $z \in D_\epsilon(\phi(y))$ de telle sorte que la courbe concaténée $\delta = \phi(\gamma \cap U) \star \gamma' \subset V$ soit lisse. Mais alors $\gamma \star \phi^{-1}(\delta)$ est lisse et relie x à z pour tous $z \in \phi^{-1}(D_\epsilon(\phi(y)))$. Ainsi $\phi^{-1}(D_\epsilon(\phi(y))) \subset E_x$ et E_x est ouvert. En utilisant un raisonnement similaire nous voyons que $M \setminus E_x$ est ouvert. Or, M est supposé connexe, et $E_x \neq \emptyset$ puisque $x \in E_x$ et par conséquent $E_x = M$. Ainsi, notre définition de distance Riemannienne fait sens.

Pour voir que la métrique Riemannienne que nous avons défini est bien une métrique sur M, il faut vérifier les trois points suivants :

(i) $d(x,y) \geq 0$ pour tous $x, y \in M$ et $d(x,y) > 0$ si $x \neq y$

(ii) $d(x,y) = d(y,x)$

(iii) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ pour tous $x, y, z \in M$.

Noter d'abord que les points *(ii)* et *(iii)* sont immédiats. Pour prouver *(i)*, il suffit de montrer que $d(x,y) > 0$ pour $x \neq y$. Soit U un domaine de carte locale en x et $\phi : U \longrightarrow V \subset \mathbb{R}^n$ le difféomorphisme associé. Puisque V est un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous pouvons choisir $\epsilon > 0$ tel que la boule fermée $\overline{B}(\phi(x), \epsilon)$ de centre $\phi(x)$ et de rayon ϵ soit incluse dans V mais $y \notin \phi^{-1}(\overline{B}(\phi(x), \epsilon))$.

Noter que dans les coordonnées locales, g est définie positive, lisse et donc en particulier continue. Puisque l'ensemble $S := \overline{B}(\phi(x), \epsilon) \times \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| = 1\}$ est compact, nous pouvons définir les constantes $\alpha := \inf_{(z,v)\in S} \|v\|_z$ et $\beta := \sup_{(z,v)\in S} \|v\|_z$ qui sont strictement positives et finies. Alors pour tous $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, et tous $z \in B(\phi(x), \epsilon)$, nous avons

$$\alpha \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\| \leq \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\|_z \leq \beta \left\| \frac{v}{\|v\|} \right\|$$

et par homogénéité,

$$\alpha\|v\| \leq \|v\|_z \leq \beta\|v\|. \tag{1.21.1}$$

Puisque $y \notin \phi^{-1}(\overline{B}(\phi(x), \epsilon))$, toute courbe γ reliant x à y doit traverser le bord de $\phi^{-1}(\overline{B}(\phi(x), \epsilon))$ et par conséquent $\phi(\gamma \cap U)$ contient un point $z \in \partial\overline{B}(\phi(x), \epsilon)$ dont la distance euclidienne avec $\phi(x)$ est égale à ϵ. Ainsi,

$$\ell(\gamma) \geq \ell(\gamma \cap \phi^{-1}(\overline{B}(\phi(x), \epsilon))) \geq \alpha\ell(\phi(\gamma \cap U) \cap \overline{B}(\phi(x), \epsilon))) \geq \alpha\epsilon$$

puisque la distance euclidienne est celle de la ligne droite. Donc $d(x, y) \geq \alpha\epsilon > 0$ et nous avons fini la preuve. □

Proposition 1.22. *Si M est connexe, alors la topologie induite sur M par la distance Riemannienne d coïncide avec la topologie originale de M.*

Démonstration. Nous noterons $\mathscr{T}$ et $\mathscr{T}_d$ respectivement la topologie originale et la topologie engendrée par d sur M. Remarquer que par définition de la distance Riemannienne d, celle-ci est continue. En particulier, si x est un point de M, alors l'application $d(x, \cdot) : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est continue. Alors pour tout réel $r > 0$, $d(x, \cdot)^{-1}([0, r[) = B(x, r) \in \mathscr{T}$ et par conséquent $\mathscr{T}_d \subset \mathscr{T}$.

Soient x et y dans M. Si nous reprenons les mêmes notations que dans la preuve précédente, alors par le même raisonnement nous pouvons établir l'équation (1.21.1) qui dit que pour tous $v \in \mathbb{R}^n$, et tous $z \in B(\phi(x), \epsilon)$, nous avons

$$\alpha\|v\| \leq \|v\|_z \leq \beta\|v\|$$

avec α et β des constantes strictement positives. Par ce que nous avons vu précédemment, il est clair que

$$\alpha\|\phi(x) - z\| \leq d(x, z) \leq \beta\|\phi(x) - z\|$$

pour tous $z \in B(\phi(x), \epsilon)$. Si $\delta > 0$ est choisi tel que $\beta\delta \leq \epsilon$, alors la boule ouvert $B_d(x, \delta)$ centrée en x de rayon δ pour la distance Riemannienne d est incluse dans $\phi^{-1}(B(\phi(x), \beta\delta)) \subset \phi^{-1}(B(\phi(x), \epsilon)) \subset U$ et donc $\mathscr{T} \subset \mathscr{T}_d$. Ainsi, nous avons démontré que $\mathscr{T} = \mathscr{T}_d$ comme souhaité. □

1.23. Si (M, g) est une variété Riemannienne, alors g induit naturellement une norme sur l'espace cotangant T_x^*M en $x \in M$ qui est donnée par

$$\|L\|_x = \sup\{L(v) \mid v \in T_xM, \|v\|_x \leq 1\}$$

pour tout $L \in T_x^*M$.

1.2.3 Fonctions définies sur les fibrés

Après cette courte introduction à la notion de fibré, nous entrons dans le vif du sujet et pouvons étudier des fonctions définies sur ces fibrés. Dans tout ce qui suit, nous considérerons uniquement des variétés Riemanniennes différentiables connexes sans bord de dimension finie n (sauf dans certains cas précis où nous préciserons les conditions sur la variété). Pour une variété M, nous noterons respectivement $\pi : TM \longrightarrow M$ et $\pi^* : T^*M \longrightarrow M$ le fibré tangent et le fibré cotangent de M. Nous munissons de plus M d'une métrique Riemannienne g. Comme dans la section précédente, $\|\cdot\|_x$ désigne la norme induite par g sur la fibre T_xM pour x un point de M. Cette norme est bien entendu continue.

Les définitions suivantes se généralisent aux fonctions définies sur l'espace total d'un fibré vectoriel localement trivial de dimension finie, mais nécessite la définition du fibré dual et de la notion de norme continue sur les fibres. Nous avons décidé de ne pas traiter ces notions ici et de procéder directement au cas qui nous intéresse, c'est-à-dire celui des fibrés tangents. Le lecteur intéressé pourra se référer au Chapitre 6 de [Le09]. De même, les résultats que nous énonçons ci-dessous existent sous forme plus générale et des preuves complètes se trouvent dans [Fa08], voir théorèmes 1.3.12 et 1.3.14.

Définition 1.24. Une fonction $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite *superlinéaire au-dessus des sous-ensembles compacts* de M si pour tout sous-ensemble compact C de M et pour tout $K \geq 0$, il existe une constante $A(C, K) > -\infty$ telle que

$$\forall (x, v) \in TM, x \in C \implies L(x, v) \geq K\|v\|_x + A(C, K).$$

Définition 1.25. Soit $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. On dit que L est *convexe dans les fibres* si la restriction $L|_{T_xM}$ est convexe pour tout $x \in M$.

Avant de pourvoir énoncer et prouver le théorème suivant, il nous faut un lemme provenant de la topologie.

Lemme 1.26. *Soit X un espace topologique tel que les singletons soient fermés. Pour que X soit régulier il faut et il suffit que pour tout point $x \in X$ et tout voisinage ouvert U de x, il existe un voisinage ouvert V de x tel que $\overline{V} \subset U$.*

Démonstration. Supposons X régulier et donnons nous le point x et un voisinage ouvert U de x. Considérer le fermé $B = X \setminus U$. Puisque x n'appartient pas à B, il existe par hypothèse des ouverts disjoints V et W tels que $x \in V$ et $B \subset W$. L'ensemble $\overline{V}$ est disjoint de B car si $y \in B$, alors W est un voisinage ouvert de y disjoint de V. Ainsi, $\overline{V} \subset U$.

Réciproquement, donnons-nous un point $x \in X$ et un fermé B ne contenant pas x. Alors $U = X \setminus B$ est un voisinage ouvert de x et donc par hypothèse il existe un ouvert V contenant x et tel que $\overline{V} \subset U$. Mais alors V et $X \setminus \overline{V}$ sont ouvert, disjoints et contiennent respectivement x et B. Donc X est régulier. □

1.27. Remarquer qu'une variété M est localement compact et de Hausdorff et donc régulier. Ce résultat est donc toujours valable pour les variétés.

Théorème 1.28. *Soit M une variété telle que décrite plus haut mais avec bord et $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Considérons le fibré cotangent $\pi^* : T^*M \longrightarrow M$ et définissons $H : T^*M \longrightarrow \mathbb{R}$ par*

$$H(x, \varphi) = \sup_{v \in T_x M} \{\varphi(v) - L(x, v)\}.$$

Si L est superlinéaire au-dessus des sous-ensembles compacts de M, alors H est continue et superlinéaire au-dessus des sous-ensembles compacts de M.

Démonstration. Montrons d'abord la continuité de H. Puisque M est localement compact et la continuité est une propriété locale, nous pouvons sans perte de généralité nous placer dans le cas où le fibré tangent est trivial, c'est-à-dire que nous pouvons écrire $TM = M \times \mathbb{R}^n$ avec M compact. Puisque la norme sur l'unique fibre $\mathbb{R}^n$ est équivalente à la norme euclidienne nous pouvons sans perte de généralité travailler avec celle-ci. Ceci n'aura d'effet seulement sur les constantes de superlinéarité. Nous noterons $\|\cdot\|$ la norme euclidienne et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire standard sur $\mathbb{R}^n$. Si $\varphi \in T_x^*M = \mathbb{R}^{n*}$ et après identification de $\mathbb{R}^{n*}$ avec $\mathbb{R}^n$, nous noterons $\langle \varphi, v \rangle = \varphi(v)$ pour tout $v \in T_x M = \mathbb{R}^n$ pour clarifier l'utilisation du produit scalaire. Rappelons que la norme d'un élément φ de $\mathbb{R}^{n*}$ est donnée par

$$\|\varphi\| = \sup\{\varphi(v) \mid v \in \mathbb{R}^n, \|v\| \leq 1\}$$

et nous voyons donc qu'il s'agit encore une fois de la norme euclidienne.

Soit $K \geq 0$ une constante arbitraire. Comme L est superlinéaire sur M, il existe une constante $C > -\infty$ telle que

$$\forall x \in M, \forall v \in \mathbb{R}^n, L(x, v) \geq (K + 1)\|v\| + C.$$

Par continuité de L et par compacité de M, nous savons que $\sup_{x \in M} L(x, 0) < +\infty$. Par conséquent, nous pouvons choisir $R > 0$ tel que $R + C > \sup_{x \in M} L(x, 0)$. Ainsi, pour tout $x \in M$, $v \in \mathbb{R}^n$ et tout $\varphi \in \mathbb{R}^{n*}$ satisfaisant $\|v\| \geq R$ et $\|\varphi\| \leq K$, nous avons

$$\begin{aligned}\varphi(v) - L(x, v) \leq \|\varphi\|\|v\| - (K + 1)\|v\| - C &\leq K\|v\| - (K + 1)\|v\| - C \\ &= -\|v\| - C \leq -R - C \leq -\sup_{y \in M} L(y, 0) \leq -L(x, 0) = \varphi(0) - L(x, 0).\end{aligned}$$

Nous déduisons de cette inégalité que pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^{n*}$ satisfaisant $\|\varphi\| \leq K$,

$$H(x, \varphi) = \sup_{\|v\| \leq R} \{\varphi(v) - L(x, v)\}.$$

Par hypothèse, L est continue sur $M \times \mathbb{R}^n$ et comme nous sommes en dimension finie, le dual algébrique de $\mathbb{R}^n$ est égal à son dual topologique et ainsi φ est continue. Par conséquent, pour tout $x \in M$, la fonction $v \mapsto \varphi(v) - L(x, v)$ est continue sur $\mathbb{R}^n$. Ainsi, par compacité de $\{v \in \mathbb{R}^n : \|v\| \leq R\}$, la fonction H est majorée sur $M \times \{\varphi \in \mathbb{R}^{n*} : \|\varphi\| \leq K\}$. De plus, nous avons toujours l'inégalité $H(x, \varphi) \geq -L(x, 0) \geq -\sup_{x \in M} L(x, 0) > -\infty$ par compacité de M. Donc H est à valeurs finies partout et est donc bien définie.

Montrons la continuité de H. Soit F un fermé de $\mathbb{R}$. Alors, pour H restreinte au produit $M \times \{\varphi \in \mathbb{R}^{n*} : \|\varphi\| \leq K\}$,

$$\begin{aligned} H^{-1}(F) &= \{(x, \varphi) \in M \times \{\varphi \in \mathbb{R}^{n*} : \|\varphi\| \leq K\} : \sup_{\|v\| \leq R} \{\varphi(v) - L(x, \varphi)\} \in F\} \\ &= \bigcap_{\|v\| \leq R} \{(x, \varphi) \mid \varphi(v) - L(x, v) \in F\} = \bigcap_{\|v\| \leq R} F_v, \end{aligned}$$

où F_v est fermé dans $M \times \{\varphi \in \mathbb{R}^{n*} : \|\varphi\| \leq K\}$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant $\|v\| \leq R$ par continuité de la fonction $(x, \varphi) \mapsto \varphi(v) - L(x, v)$. Ainsi, $H^{-1}(F)$ est fermé et donc H est continue sur $M \times \{\varphi \in \mathbb{R}^{n*} : \|\varphi\| \leq K\}$. Puisque K est arbitraire, on obtient la continuité de H partout.

Pour la superlinéarité de H, nous supposons d'abord que le fibré est trivial et que M est compact. Soit $K \geq 0$ et posons

$$A := \sup\{L(x, v) \mid (x, v) \in M \times \mathbb{R}^n, \|v\| \leq K\}.$$

Par compacité et continuité, $A < \infty$. Nous obtenons alors $H(x, \varphi) \geq \varphi(v) - A$ pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant $\|v\| \leq K$. En particulier, en prenant $v = K\varphi/\|\varphi\|$, on obtient $H(x, \varphi) \geq K\|\varphi\| - A$.

Si le fibré n'est pas trivial, considérons un compact $C \subset M$. Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ une collection de domaines de trivialisations locales de M qui recouvre M. Par compacité de C, il existe $U_1, \ldots, U_m$ appartenant à cette collection tel que $C \subset U_1 \cup \ldots \cup U_m$ et sur chaque U_i le fibré tangent est trivial. Si $x \in C$, alors il existe $1 \leq i \leq m$ tel que $x \in U_i$. Par Lemme 1.26, il existe V_x un ouvert tel que $x \in V_x$ et $\overline{V}_x \subset U_i$. Ainsi, $C \subset \bigcup_{x \in C} V_x$ et par compacité, il existe r tel que $C \subset \bigcup_{i=1}^r V_i$. De plus, pour tout $1 \leq i \leq m$, il existe $1 \leq j \leq n$ tel que $\overline{V}_i \subset U_j$. Posons $C_i := C \cap \overline{V}_i$, pour $i = 1, \ldots, r$. Puisque M est de Hausdorff et C est compact, C est fermé et donc C_i aussi. Puisque $C_i \subset C$ et C est compact, nous avons que C_i est aussi compact. En prenant l'union sur les i, il vient

$$\bigcup_{i=1}^r C_i = \bigcup_{i=1}^r (C \cap \overline{V}_i) = C \cap \left(\bigcup_{i=1}^r \overline{V}_i \right) \subset C.$$

Mais $C \subset V_1 \cup \ldots \cup V_r \subset \overline{V}_1 \cup \ldots \cup \overline{V}_r$ et donc $C \subset \bigcup_{i=1}^r C_i$. Ainsi, $C = \bigcup_{i=1}^r C_i$ avec $C_i \subset U_j$ pour un certain $1 \leq j \leq n$ et C_i est compact pour tout i. En appliquant la partie précédente, nous avons que H est superlinéaire au-dessus de chaque C_i et donc au-dessus de l'union finie des C_i, c'est-à-dire au-dessus de C, ce qui achève la preuve puisque C est arbitraire. $\square$

Théorème 1.29. *Soit $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si L est convexe dans les fibres, alors L est superlinéaire au-dessus des compacts de M si et seulement si $L|_{T_xM}$ est superlinéaire, pour tout $x \in M$.*

Démonstration. Montrons le sens direct. Fixons $K \geq 0$ et soit $x \in M$. Nous allons montrer que $L|_{T_xM}$ est superlinéaire. Par compacité du singleton $\{x\}$ et superlinéarité de L, nous avons l'existence d'une constante $C(x, K) > -\infty$ telle que

$$\forall v \in T_xM, L(x, v) \geq K\|v\|_x + C(x, K),$$

et c'est exactement le résultat cherché.

Montrons maintenant la réciproque. Quitte à répéter l'argument de la fin de la preuve de Théorème 1.28, nous pouvons sans perte de généralité supposé le fibré tangent trivial et M compact. Comme dans la preuve précédente, nous travaillons avec la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Fixons $x_0 \in M$ et soit $K \geq 0$. Montrons qu'il existe un voisinage ouvert V_{x_0} de x_0 et une constante $C(x_0, K) > -\infty$ tels que

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall x \in V_{x_0},\ L(x, v) \geq K\|v\| + C(x_0, K). \tag{1.29.1}$$

La preuve de cette inégalité achèvera la démonstration car $M = \bigcup_{x \in M} V_x$ et par compacité de M, il existe $(x_i)_{i=1}^N$ tel que $M = \bigcup_{i=1}^N V_{x_i}$. En posant $C := \min\limits_{1 \leq i \leq N} C(x_i, K)$, on obtient

$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \forall x \in M, L(x, v) \geq K\|v\| + C,$$

ce qui est le résultat désiré.

Montrons l'inégalité 1.29.1. Par superlinéarité de $L|_{T_{x_0}M}$, il existe une constante $C_1 > -\infty$ telle que pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, nous avons l'inégalité $L(x_0, v) \geq (K+1)\|v\| + C_1$. Choisissons $R > 0$ de telle sorte que $R + C_1 \geq L(x_0, 0) + 1$. Alors, pour tout $\varphi \in \mathbb{R}^{n*}$, $v \in \mathbb{R}^n$ satisfaisant $\|\varphi\| \leq K$ et $\|v\| = R$, nous avons

$$L(x_0, v) - \varphi(v) \geq (K+1)\|v\| + C_1 - \|\varphi\|\|v\| \geq (K+1)\|v\| + C_1 - K\|v\| = R + C_1 \geq L(x_0, 0) + 1.$$

Considérons la fonction $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \min\{L(x, v) - L(x, 0) - \varphi(v) \mid v \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathbb{R}^{n*} \text{ avec } \|v\| = R \text{ et } \|\varphi\| \leq K\}.$$

Noter que par compacité et continuité, le minimum est atteint. Par compacité de M, nous avons que la fonction à trois variables $L(x, v) - L(x, 0) - \varphi(v)$ est uniformément continue sur $M \times \{(v, \varphi) \mid v \in \mathbb{R}^n, \varphi \in \mathbb{R}^{n*} \text{ avec } \|v\| = R \text{ et } \|\varphi\| \leq K\}$. Ainsi, pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall x_1, x_2 \in M, \forall v_1, v_2 \in \mathbb{R}^n, \forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^{n*}$, $\|x_1 - x_2\| + \|v_1 - v_2\| + \|\varphi_1 - \varphi_2\| < \delta$ implique

$$|L(x_1, v_1) - L(x_1, 0) - \varphi_1(v_1) - L(x_2, v_2) + L(x_2, 0) + \varphi_2(v_2)| < \epsilon.$$

Soit $\delta > 0$ correspondant au choix $\epsilon = f(x_0)/2$. Soit $x \in M$ tel que $\|x - x_0\| < \delta$ et supposons que $f(x)$ est atteint en (v_x, φ_x). Alors,

$$|L(x_0, v_x) - L(x_0, 0) - \varphi_x(v_x) - L(x, v_x) + L(x, 0) + \varphi_x(v_x)| < f(x_0)/2.$$

On a $f(x_0) \leq L(x_0, v_x) - L(x_0, 0) - \varphi_x(v_x) \leq L(x, v_x) - L(x, 0) - \varphi_x(v_x) + f(x_0)/2 = f(x) + f(x_0)/2$, et donc $f(x) \geq f(x_0)/2 > 0$. Ainsi, il existe un voisinage ouvert $V_{x_0} = \{x \in M \ : \ \|x - x_0\| < \delta\}$ de x_0 tel que pour tout $x \in V_{x_0}$, pour tout $v \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathbb{R}^{n*}$,

$$\|v\| = R, \|\varphi\| \leq K \implies L(x, v) - \varphi(v) > L(x, 0) = L(x, 0) - \varphi(0).$$

Ainsi, nous remarquons que pour tout $x \in V_{x_0}$ et $\varphi \in \mathbb{R}^{n*}$ avec $\|\varphi\| \leq K$, la fonction convexe $L(x, \cdot) - \varphi(\cdot)$ atteint sont minimum sur l'ensemble $\{v \in \mathbb{R}^n \mid \|v\| \leq R\}$ à l'intérieur de cet ensemble. Or, par Proposition 1.3, un minimum local pour une fonction convexe est un minimum global. Ainsi, en posant $C := \min\{L(x, v) - \varphi(v) \mid x \in \overline{V}_{x_0}, v \in \mathbb{R}^n \text{ avec } \|v\| \leq R, \varphi \in \mathbb{R}^{n*} \text{ avec } \|\varphi\| \leq K\} > -\infty$ (par compacité et continuité), nous obtenons que pour tout $x \in \overline{V}_{x_0}, v \in \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in \mathbb{R}^{n*}$ avec $\|\varphi\| \leq K$, $L(x, v) - \varphi(v) \geq C$. En particulier, pour $\varphi = Kv/\|v\|$, on obtient

$$\forall (x, v) \in \overline{V}_{x_0} \times \mathbb{R}^n, L(x, v) \geq K\|v\| + C,$$

et nous avons démontré l'inégalité (1.29.1). $\square$

2 Théorie de Tonelli

Nous entrons dans le vif du sujet et étudions en deux temps les deux concepts majeurs de la théorie de Tonelli : les courbes absolument continues et les Lagrangiens. À la fin de cette section nous prouvons le théorème de Tonelli concernant l'existence de solutions au problème de minimisation présenté dans l'introduction. Nous suivons [Fa08], chapitre 3.

2.1 Courbes absolument continues

Nous expliquons en quelques mots la notion de topologie faible avant de nous tourner vers les courbes absolument continues dans $\mathbb{R}^n$. Finalement, nous généraliserons cette notion aux courbes sur une variété abstraite.

2.1.1 La topologie faible

Soit X un $\mathbb{F}$-espace vectoriel topologique et notons X' son dual topologique. Ici, $\mathbb{F}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Définissons une application B, appelée forme bilinéaire canonique, de $X \times X'$ dans $\mathbb{F}$ par $B(x,f) = f(x)$. Posons $\Gamma_X := \{p = |B(\,\cdot\,,f)| \ : \ f \in X'\}$. C'est une collection de semi-normes $p(x) = |f(x)|$ ce qui signifie que $p(x) = 0$ n'implique pas nécessairement $x = 0$. La topologie faible $\sigma(X, X')$ est la topologie engendrée par la collection de boules

$$\{\mathcal{B}(p,x,\epsilon) \mid p \in \Gamma_X, x \in X, \epsilon > 0\}\,,$$

où $\mathcal{B}(p,x,\epsilon) = \{y \in X \mid p(x-y) < \epsilon\}$.

Soit $\{x_n\}$ une suite dans X. On dit que x_n converge vers $x \in X$ dans la topologie faible $\sigma(X, X')$ si $p(x_n - x) \to 0, \forall p \in \Gamma_X$ lorsque $n \to +\infty$. Nous remarquons que

$$\forall p \in \Gamma_X, p(x_n - x) \to 0 \iff \forall f \in X', |f(x_n - x)| \to 0 \iff \forall f \in X', f(x_n) \to f(x).$$

Nous disons alors que x_n converge faiblement vers x et nous notons $x_n \rightharpoonup x$.

Discutons désormais le cas spécifique qui nous intéresse dans la suite, c'est-à-dire la topologie faible $\sigma(L^1, (L^1)')$. Rappelons que le dual de L^1 s'identifie, par le Théorème de représentation de Riesz, à l'espace L^∞. Rappelons d'abord ce théorème très puissant.

Théorème 2.1 (Théorème de représentation de Riesz)**.** *Soit $1 \leq p < \infty$ et notons p' son conjugué. Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors pour toute fonctionnelle linéaire $F \in (L^p(\Omega))^*$, il existe un unique $g \in L^{p'}(\Omega)$ tel que pour tout $f \in L^p(\Omega)$,*

$$F(f) = \int_\Omega f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

Soit $a < b$ des réels et considérons $L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$ et son dual. Pour ne pas alourdir la notation, nous écrirons $\sigma(L^1, L^\infty)$ pour désigner la topologie faible $\sigma(L^1((a,b),\mathbb{R}^n), L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n))$. Soit f_n une suite de fonctions de $L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$. Cette suite converge faiblement vers une certaine fonction $f \in L^1((a,b),\mathbb{R}^n)$ si et seulement si $F(f_n) \to F(f)$, pour chaque $F \in (L^1)'$ lorsque $n \to +\infty$. En appliquant le Théorème de représentation de Riesz, nous voyons que

$$f_n \rightharpoonup f \iff \int_a^b \Phi(s)\,(f_n(s))\ \mathrm{d}s \to \int_a^b \Phi(s)\,(f(s))\ \mathrm{d}s,\ \ \forall \Phi \in L^\infty((a,b),\mathbb{R}^n).$$

2.1.2 Courbes absolument continues dans $\mathbb{R}^k$

Le but de cette section est de prouver le résultat suivant :

Proposition 2.2. *Soit $\gamma_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une suite de courbes absolument continues. Supposons que la suite des dérivées $\dot{\gamma}_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ soit uniformément intégrable. Si il existe un certain $t_0 \in [a,b]$ tel que la suite $\{\gamma_n(t_0)\}$ soit bornée en norme, alors il existe une sous-suite $\{\gamma_{n_j}\}$ qui converge uniformément vers une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$. La courbe γ est absolument continue et la suite des dérivées $\{\dot{\gamma}_{n_j}\}$ converge vers $\dot{\gamma}$ dans la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$.*

Après avoir défini la notion de courbes absolument continues et rappelé certains résultats classiques de théorie de la mesure, nous prouverons ce résultat dont nous verrons l'utilité dans la prochaine section. Cette partie est basée sur [Fa08] Section 3.1. Nous travaillons tout le long dans $\mathbb{R}^k$ que nous munissons de la norme euclidienne $\|\cdot\|$.

Définition 2.3. Une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est dite *absolument continue* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque famille $\{]a_i, b_i[\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'intervalles disjoints de $[a,b]$,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (b_i - a_i) < \delta \implies \sum_{i\in\mathbb{N}} \|\gamma(b_i) - \gamma(a_i)\| < \epsilon.$$

2.4. Il est clair que la continuité absolue implique l'uniforme continuité sur $]a,b[$ et donc la continuité sur $[a,b]$.

Avant de poursuivre, nous rappelons un résultat bien connu de théorie de la mesure. Nous ne prouvons pas ce théorème que nous supposons connu à l'avance.

Théorème 2.5. *Une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est absolument continue si et seulement si les trois conditions suivantes sont satisfaites :*

(i) La dérivée $\dot{\gamma}(t)$ existe pour presque tout $t \in [a,b]$.

(ii) La dérivée $\dot{\gamma}$ est intégrable au sens de Lebesgue sur $[a,b]$.

(iii) Pour tout $t \in [a,b], \gamma(t) - \gamma(a) = \int_a^t \dot{\gamma}(s)\,\mathrm{d}s$.

Démonstration. Voir Chapitre 3, Section 3 de [SS05]. □

Lemme 2.6. *Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ une courbe absolument continue. Alors, pour tout $t \leq t' \in [a,b]$, l'inégalité suivante a lieu*

$$\|\gamma(t') - \gamma(t)\| \leq \int_t^{t'} \|\dot{\gamma}(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

Démonstration. Soit $v \in \mathbb{R}^n$ avec $\|v\| = 1$. La courbe $v \circ \gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ est absolument continue. En effet, soit $\epsilon > 0$ et choisissons $\delta > 0$ correspondant à $\epsilon/\|v\|$ provenant de la continuité absolue de γ. Soit $\{]a_i, b_i[\}_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'intervalles disjoints de $[a,b]$ telle que $\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) < \delta$. Alors

$$\sum_{i=1}^{\infty} |v(\gamma(b_i)) - v(\gamma(a_i))| \leq \|v\| \sum_{i=1}^{\infty} \|\gamma(b_i) - \gamma(a_i)\| < \epsilon.$$

D'après Théorème 2.5, la dérivée de $v \circ \gamma$ existe presque partout et nous voyons que cette dérivée vaut $v(\dot{\gamma}(t))$. De plus, pour tout $t \leq t' \in [a,b]$,

$$v(\gamma(t') - \gamma(t)) = v(\gamma(t')) - v(\gamma(t)) = \int_t^{t'} v(\dot{\gamma}(s))\,\mathrm{d}s \leq \|v\| \int_t^{t'} \|\dot{\gamma}(s)\|\,\mathrm{d}s = \int_t^{t'} \|\dot{\gamma}(s)\|\,\mathrm{d}s.$$

En prenant $v = \frac{\gamma(t')-\gamma(t)}{\|\gamma(t')-\gamma(t)\|}$ nous obtenons le résultat cherché. □

Les deux définitions qui suivent sont des rappels et ont pour but d'énoncer le Théorème d'Ascoli-Arzéla.

Définition 2.7. Soit (E,d) un espace métrique. Une famille de courbes $\gamma_n : [a,b] \longrightarrow E$ est dite *équicontinue* si pour tout $t \in [a,b]$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $d(\gamma_n(t), \gamma_n(t')) < \epsilon$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t' \in [a,b]$ tel que $|t - t'| < \delta$. Remarquer que δ ne dépend uniquement que de ϵ et t.

Définition 2.8. Soit X un espace topologique. Un sous-ensemble $K \subset X$ est dit *relativement compact* si son adhérence $\overline{K}$ est compacte.

Théorème 2.9 (Ascoli-Arzéla)**.** *Soit X un espace compact et munissons $\mathbb{R}^k$ de la distance euclidienne. Munissons $C(X,\mathbb{R}^n)$ de la topologie uniforme. Alors, pour qu'une partie A de $C(X,\mathbb{R}^n)$ soit relativement compacte il faut et il suffit que*

(i) A soit équicontinue.

(ii) Pour tout $x \in K$, $A(x) := \{f(x) \mid f \in A\}$ soit relativement compact.

Démonstration. Voir [Mu00] Théorème 45.4. □

Définition 2.10. Une courbe mesurable $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ est dite *uniformément intégrable* au sens de Lebesgue si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout ensemble mesurable $E \subset [a,b]$, si $m(E) < \delta$, alors $\int_E \|\gamma(s)\| \, \mathrm{d}s < \epsilon$.

Nous pouvons désormais prouver le proposition énoncée au début de cette section. Nous verrons son utilité dans la prochaine section lorsque nous introduirons les Lagrangiens.

Démonstration de Proposition 2.2. Commençons par montrer qu'il existe une sous-suite γ_{n_j} qui converge uniformément vers une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$. Nous allons pour cela appliquer le Théorème d'Ascoli-Arzéla à la famille de courbes $\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subset C([a,b], \mathbb{R}^k)$. Il s'agit de vérifier les conditions du théorème.

Nous allons montrer que la suite γ_n est équicontinue. Fixons pour cela $\epsilon > 0$ et choisissons $\delta > 0$ correspondant à l'uniforme intégrabilité de la suite des dérivées. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t' > t \in [a,b]$ tels que $t' - t < \delta$, nous avons

$$\|\gamma_n(t') - \gamma_n(t)\| \leq \int_t^{t'} \|\dot{\gamma}_n(s)\| \, \mathrm{d}s < \epsilon,$$

où la première inégalité découle de Lemme 2.6 et la seconde provient de l'uniforme intégrabilité. Ainsi, la suite γ_n est uniformément équicontinue et donc en particulier équicontinue.

Montrons maintenant que l'ensemble $\{\gamma_n(t) | n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact pour tout $t \in [a,b]$. Puisque c'est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^k$ et que son adhérence est fermée par définition, il suffit de montrer que l'adhérence de l'ensemble est borné pour avoir la compacité. Par hypothèse, il existe $t_0 \in [a,b]$ tel que la suite $\gamma_n(t_0)$ est bornée en norme. Par uniforme équicontinuité de la suite γ_n nous avons, pour $\epsilon > 0$ fixé, l'existence de $\delta > 0$ tel que $\forall t \in [a,b]$ tel que $|t - t_0| \leq \delta$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $\|\gamma_n(t)\| \leq \|\gamma_n(t_0)\| + \epsilon$ et donc pour tout $t \in [t_0 - \delta, t_0 + \delta]$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\gamma_n(t)\| < +\infty$. Noter que puisque l'équicontinuité est uniforme, δ ne dépend que de ϵ et non pas de t_0. Ainsi, nous pouvons répéter le raisonnement avec $t_1 = t_0 + \delta$ pour obtenir $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|\gamma_n(t)\| < +\infty$ pour tout $t \in [t_1 - \delta, t_1 + \delta]$. Donc la suite $\gamma_n(t)$ est bornée en norme sur l'intervalle $[t_0 - \delta, t_0 + 2\delta]$. En procédant ainsi, on obtient une borne pour la suite sur l'intervalle $[t_0 - m_1\delta, t_0 + m_2\delta]$ avec $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Puisque $b - a$ est fini, on obtient le résultat sur l'intervalle $[a,b]$ tout entier. Ainsi, $\{\gamma_n(t) \mid n \in \mathbb{N}\}$ est relativement compact pour chaque $t \in [a,b]$.

Par le Théorème 2.9 d'Ascoli-Arzéla, $\overline{\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ est compact en tant que sous-ensemble de $C([a,b], \mathbb{R}^k)$ muni de la distance uniforme. Donc $\overline{\{\gamma_n \mid n \in \mathbb{N}\}}$ est séquentiellement compact et par conséquent la suite γ_n admet une sous-suite γ_{n_j} qui converge uniformément vers une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ qui est alors continue.

Montrons que la courbe γ est absolument continue. Fixons pour cela $\epsilon > 0$ et choisissons encore une fois le $\delta > 0$ correspondant à l'uniforme intégrabilité de la suite des dérivées. Soit $\{]a_i, b_i[\}_{i\in\mathbb{N}}$ une famille d'intervalles disjoints de $[a, b]$ telle que $\sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) < \delta$. Alors, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\gamma_{n_j}(b_i) - \gamma_{n_j}(a_i)\| \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{a_i}^{b_i} \|\dot{\gamma}_{n_j}(s)\| \, \mathrm{d}s = \int_{\bigcup_i]a_i,b_i[} \|\dot{\gamma}_{n_j}(s)\| \, \mathrm{d}s < \epsilon.$$

La première inégalité provient de Lemme 2.6, la seconde égalité vient du fait que les $]a_i, b_i[$ sont disjoints et la dernière inégalité découle de l'uniforme intégrabilité et du fait que $m(\bigcup_i]a_i, b_i[) = \sum_{i\in\mathbb{N}}(b_i - a_i) < \delta$. En prenant la limite lorsque $j \to +\infty$ et en utilisant la continuité de la norme, nous obtenons

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \|\gamma(b_i) - \gamma(a_i)\| \leq \epsilon$$

et ainsi γ est absolument continue.

Par Théorème 2.5, la dérivée $\dot{\gamma} : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ existe presque partout et nous avons pour tout $t \leq t' \in [a, b]$ l'égalité suivante :

$$\forall t < t' \in [a, b],\ \gamma(t') - \gamma(t) = \int_t^{t'} \dot{\gamma}(s) \, \mathrm{d}s. \tag{2.10.1}$$

Il nous reste à montrer que $\{\dot{\gamma}_{n_j}\}$ converge vers $\dot{\gamma}$ dans la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$. D'après la discussion de la section précédente, il s'agit de montrer que pour toute fonction $\Phi : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^k$ mesurable et bornée,

$$\int_a^b \Phi(s)(\dot{\gamma}_{n_j}(s)) \, \mathrm{d}s \to \int_a^b \Phi(s)(\dot{\gamma}(s)) \, \mathrm{d}s,\ \text{lorsque } j \to +\infty. \tag{2.10.2}$$

Nous allons utiliser la densité des fonctions simples dans l'espace $L^\infty([a, b], \mathbb{R}^k)$ pour prouver ce résultat. Ainsi, la première étape sera de montrer l'équation (2.10.2) dans le cas d'une fonction indicatrice χ_E avec $E \subset [a, b]$ mesurable de mesure finie. Nous décomposons ce problème en trois étapes : les intervalles, les ouverts et finalement les mesurables.

Soit $E = [t, t'] \subset [a, b]$ un intervalle. La convergence de γ_{n_j} vers γ et l'équation (2.10.1) donnent

$$\int_t^{t'} \dot{\gamma}_{n_j}(s) \, \mathrm{d}s = \gamma_{n_j}(t') - \gamma_{n_j}(t) \to \gamma(t') - \gamma(t) = \int_t^{t'} \dot{\gamma}(s) \, \mathrm{d}s$$

et donc, lorsque E est un intervalle, le résultat est prouvé.

Soit E un ouvert de $[a, b]$. Alors $E = \bigcup_{i\in I}]a_i, b_i[$ avec les intervalles $]a_i, b_i[$ disjoints et I un ensemble d'indices au plus dénombrable. Si cette union est finie, alors par la partie précédente et l'additivité de l'intégrale de Lebesgue pour les unions disjointes le résultat est prouvé. Sinon, fixons $\epsilon > 0$ et comme auparavant choisissons $\delta > 0$ correspondant à la condition d'uniforme intégrabilité de la suite des dérivées $\dot{\gamma}_{n_j}$. Nous avons $m\left(\bigcup_{i=1}^n]a_i, b_i[\right) \nearrow m(E) < +\infty$ lorsque $n \to +\infty$ et donc il existe un rang n_0 suffisamment grand pour que $m\left(\bigcup_{n\geq n_0}]a_i,b_i[\right) < \delta$. Posons $I_0 = \{n \in \mathbb{N} | n < n_0\}$. C'est un sous-ensemble fini de I tel que $\sum_{i\in I\setminus I_0}(b_i - a_i) < \delta$. Alors, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{i\in I\setminus I_0} \|\gamma_{n_j}(b_i) - \gamma_{n_j}(a_i)\| \leq \sum_{i\in I\setminus I_0} \int_{a_i}^{b_i} \|\dot\gamma_{n_j}(s)\| \,\mathrm{d}s = \int_{\bigcup_{i\in I\setminus I_0}]a_i,b_i[} \|\dot\gamma_{n_j}(s)\| \,\mathrm{d}s < \epsilon,$$

par les mêmes arguments que nous avons utilisé auparavant. En laissant $j \to +\infty$, nous obtenons

$$\sum_{i\in I\setminus I_0} \|\gamma(b_i) - \gamma(a_i)\| < \epsilon.$$

Posons $E_0 = \bigcup_{i\in I_0}]a_i,b_i[$. Alors,

$$\left\|\int_{E\setminus E_0} \dot\gamma_{n_j}(s)\,\mathrm{d}s\right\| = \left\|\sum_{i\in I\setminus I_0} \gamma_{n_j}(b_i) - \gamma_{n_j}(a_i)\right\| \leq \sum_{i\in I\setminus I_0} \|\gamma_{n_j}(b_i) - \gamma_{n_j}(a_i)\| < \epsilon$$

et $\| \int_{E\setminus E_0} \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s\| \leq \epsilon$. Puisque I_0 est fini, nous avons grâce à la partie précédente

$$\int_{E_0} \dot\gamma_{n_j}(s)\,\mathrm{d}s \to \int_{E_0} \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s, \text{ lorsque } j \to +\infty.$$

Par conséquent,

$$\left\|\int_E \dot\gamma_{n_j}(s)\,\mathrm{d}s - \int_E \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s\right\| < 2\epsilon + \left\|\int_{E_0} \dot\gamma_{n_j}(s)\,\mathrm{d}s - \int_{E_0} \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s\right\|$$

et donc

$$\limsup_{j\to+\infty} \left\|\int_E \dot\gamma_{n_j}(s)\,\mathrm{d}s - \int_E \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s\right\| \leq 2\epsilon.$$

Puisque ϵ est arbitraire, nous obtenons

$$\int_E \dot\gamma_{n_j}(s)\,\mathrm{d}s \to \int_E \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s, \text{ lorsque } j \to +\infty,$$

comme désiré.

Soit $E \subset [a,b]$ un mesurable quelconque. Alors nous pouvons approximer E par un ensemble G_δ. Plus précisément, il existe une suite décroissante d'ouverts U_n telle que $E \subset \bigcap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ et $m(U_n) \searrow m(E)$ lorsque $n \to +\infty$. Définissons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction $f_n(t) = \chi_{U_n}(t)\dot\gamma(t)$. C'est une suite de fonctions mesurables qui converge vers la fonction $f(t) = \chi_E(t)\dot\gamma(t)$. Il est clair que pour tout $t \in [a,b]$, $\|f_n(t)\| \leq \|\dot\gamma(t)\|$ et cette dernière fonction est intégrable. Ainsi, par le théorème de la convergence dominée, nous avons que

$$\int_{U_n} \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s \to \int_E \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s.$$

Fixons $\epsilon > 0$ et choisissons $\delta > 0$ correspondant à la condition d'uniforme intégrabilité. Soit $N \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $m(U_N \setminus E) < \delta$ et

$$\left\|\int_{U_N} \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s - \int_E \dot\gamma(s)\,\mathrm{d}s\right\| < \epsilon.$$

Alors par uniforme intégrabilité, nous avons pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\left\| \int_{U_N \setminus E} \dot{\gamma}_{n_j}(s)\, \mathrm{d}s \right\| \leq \int_{U_N \setminus E} \|\dot{\gamma}_{n_j}(s)\|\, \mathrm{d}s < \epsilon.$$

L'ouvert U_N étant fixé, nous avons par la partie précédente que lorsque $j \to +\infty$,

$$\int_{U_N} \dot{\gamma}_{n_j}(s)\, \mathrm{d}s \to \int_{U_N} \dot{\gamma}(s)\, \mathrm{d}s.$$

Par conséquent,

$$\left\| \int_E \dot{\gamma}_{n_j}(s)\, \mathrm{d}s - \int_E \dot{\gamma}(s)\, \mathrm{d}s \right\| < 2\epsilon + \left\| \int_{U_N} \dot{\gamma}_{n_j}(s)\, \mathrm{d}s - \int_{U_N} \dot{\gamma}(s)\, \mathrm{d}s \right\|$$

et donc

$$\limsup_{j \to +\infty} \left\| \int_E \dot{\gamma}_{n_j}(s)\, \mathrm{d}s - \int_E \dot{\gamma}(s)\, \mathrm{d}s \right\| \leq 2\epsilon.$$

En laissant $\epsilon \to 0$, nous obtenons

$$\int_E \dot{\gamma}_{n_j}(s)\, \mathrm{d}s \to \int_E \dot{\gamma}(s)\, \mathrm{d}s, \text{ lorsque } j \to +\infty.$$

Ainsi, le résultat est démontré pour les fonctions indicatrices et par linéarité de l'intégrale de Lebesgue, le résultat est valable aussi pour les fonctions simples que nous rappelons sont denses dans $L^\infty([a,b], \mathbb{R}^k)$. Montrons finalement que le résultat est vrai pour n'importe quelle fonction de cet espace vectoriel normé. La norme que nous considérons est la norme standard $\|\cdot\|_\infty$ du sup-essentiel. Considérons, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la fonction $\Theta_n : L^\infty([a,b], \mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\Theta_n(\Phi) = \int_a^b \Phi(s) \dot{\gamma}_n(s)\, \mathrm{d}s.$$

Définissons aussi la fonction $\Theta : L^\infty([a,b], \mathbb{R}^k) \longrightarrow \mathbb{R}$ par

$$\Theta(\Phi) = \int_a^b \Phi(s) \dot{\gamma}(s)\, \mathrm{d}s.$$

Il s'agit de prouver que $\Theta_{n_j}(\Phi) \to \Theta(\Phi)$ pour tout $\Phi \in L^\infty([a,b], \mathbb{R}^k)$ lorsque $j \to +\infty$. Clairement, Θ_n est linéaire et nous avons, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\|\Theta_{n_j}\| \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}_{n_j}(s)\|\, \mathrm{d}s < +\infty,$$

puisque $\dot{\gamma}_{n_j}$ est intégrable. Ainsi, Θ_{n_j} est continue pour tout j. De même, Θ est linéaire et continue.

Montrons désormais que $\sup_{j \in \mathbb{N}} \|\Theta_{n_j}\| < +\infty$. Choisissons $\delta > 0$ provenant de l'uniforme intégrabilité de $\dot{\gamma}_{n_j}$ avec $\epsilon = 1$. Partitionnons l'intervalle $[a,b]$ en $[\frac{b-a}{\delta}] + 1$ sous-intervalles disjoints de longueurs inférieures à δ. Sur chacun des ces sous-intervalles, l'intégrale de $\|\dot{\gamma}_{n_j}\|$ est bornée par 1. Ainsi,

$$\|\Theta_{n_j}\| \leq \int_a^b \|\dot{\gamma}_{n_j}(s)\|\, \mathrm{d}s \leq \left[\frac{b-a}{\delta} \right] + 1.$$

Ceci étant vrai pour tout j, nous avons que $M := \sup_{j\in\mathbb{N}} \|\Theta_{n_j}\| < +\infty$.

Fixons $\epsilon > 0$ et choisissons par densité $\Psi \in L^\infty([a,b],\mathbb{R}^k)$ une fonction simple telle que $\|\Phi - \Psi\|_\infty \leq \epsilon$. Puisque Ψ est simple, nous avons $\Theta_{n_j}(\Psi) \to \Theta(\Psi)$ lorsque $j \to +\infty$. Ainsi, pour j suffisamment grand, $\|\Theta_{n_j}(\Psi) - \Theta(\Psi)\| \leq \epsilon$. Par conséquent, si j est suffisamment grand,

$$\|\Theta_{n_j}(\Phi) - \Theta(\Phi)\| \leq M\|\Phi - \Psi\|_\infty + \|\Theta_{n_j}(\Psi) - \Theta(\Psi)\| + \|\Theta\|\|\Psi - \Phi\|_\infty \leq \epsilon(M + 1 + \|\Theta\|).$$

Puisque ϵ et Φ sont arbitraires, nous obtenons

$$\forall \Phi \in L^\infty([a,b],\mathbb{R}^k), \Theta_{n_j}(\Phi) \to \Theta(\Phi), \text{ lorsque } j \to +\infty$$

comme désiré. □

2.1.3 Courbes absolument continues sur une variété

Nous définissons les courbes absolument continues sur une variété M. Soit pour cela M une variété différentiable connexe sans bord et de dimension finie. Nous munissons M d'une métrique Riemannienne g et nous notons $\|\cdot\|_x$ la norme induite par g sur T_xM et d la distance Riemannienne induite sur M.

Définition 2.11. Une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ est dite *absolument continue* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que pour chaque famille $\{]a_i,b_i[\}_{i\in\mathbb{N}}$ d'intervalles disjoints de $[a,b]$,

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} (b_i - a_i) < \delta \implies \sum_{i\in\mathbb{N}} d(\gamma(a_i),\gamma(b_i)) < \epsilon.$$

Nous dénotons par $C^{ac}([a,b],M)$ l'espace des courbes absolument continues $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$. Nous munissons cet espace de la topologie de la convergence uniforme.

Lemme 2.12. *Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe absolument continue. Alors*

$$d(\gamma(b),\gamma(a)) \leq \int_a^b \|\dot\gamma(s)\|_{\gamma(s)}\, \mathrm{d}s.$$

Démonstration. Ceci découle immédiatement de la définition de distance Riemannienne, voir section 1.2.2. □

2.2 Théorème de Tonelli

Nous étudions les Lagrangiens définis sur la variété M et prouvons deux résultats de compacité qui nous permettent de conclure cette section par la preuve du théorème de Tonelli.

2.2.1 Lagrangiens sur une variété M

Nous introduisons la notion de Lagrangiens définis sur la variété M et d'action de courbes pour ces Lagrangiens. Nous rappelons le cadre, de manière plus détaillée, du problème de minimisation de Tonelli déjà mentionné dans l'introduction.

Définition 2.13. Nous appelons *Lagrangien* sur la variété M toute fonction continue de TM dans $\mathbb{R}$.

Définition 2.14. Soit $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangien sur la variété M et $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe continue et C^1 par morceaux. Alors nous définissons l'action $\mathbb{L}(\gamma)$ de γ par

$$\mathbb{L}(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))\, \mathrm{d}s.$$

2.15. Noter qu'il est possible de définir l'action d'une courbe absolument continue $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ sur un Lagrangien L avec de faibles hypothèses sur L. En effet, si nous supposons L superlinéaire au-dessus des sous-ensembles compacts de la variété M, alors par compacité de $\gamma([a,b])$, il existe une constante $C(0) > \infty$ telle que

$$\forall t \in [a,b], \forall v \in T_{\gamma(t)}M,\ L(\gamma(t), v) \geq C(0).$$

Ainsi, la fonction $t \mapsto L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - C(0)$ est bien définie et positive presque partout pour la mesure de Lebesgue et donc $\int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - C(0)\, \mathrm{d}t$ a un sens et appartient à $[0, +\infty]$. Nous définissons alors l'action par

$$\mathbb{L}(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, \mathrm{d}t = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - C(0)\, \mathrm{d}t + C(0)(b-a).$$

Remarquer que nous permettons à l'action de prendre la valeur $+\infty$.

Définition 2.16. Soit $\mathcal{C}$ un ensemble de courbes paramétrées et continues dans M et L un Lagrangien sur M. Une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ de l'ensemble $\mathcal{C}$ est appelé *minimiseur* de l'action de L pour la classe $\mathcal{C}$ si pour toute courbe $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow M$ dans $\mathcal{C}$ telle que $\gamma_1(a) = \gamma(a)$ et $\gamma_1(b) = \gamma(b)$, nous avons $\mathbb{L}(\gamma_1) \geq \mathbb{L}(\gamma)$.

2.17. Le problème de minimisation de Tonelli consiste à minimiser l'action de courbe pour le Lagrangien L pour la classe des courbes absolument continues sur M. Un tel minimiseur, s'il existe, est appelé *minimiseur de Tonelli.*

Le but de la fin de cette section est de prouver le théorème suivant :

Théorème 2.18. *Soit $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangien de classe C^1 que nous supposons convexe dans les fibres et superlinéaire au-dessus des sous-ensembles compacts de la variété Riemannienne (M, g). Soit γ_n une suite de courbes dans $C^{ac}([a, b], M)$ qui converge uniformément vers une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ et telle que $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) < +\infty$. Alors γ appartient à $C^{ac}([a, b], M)$ et $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) \geq \mathbb{L}(\gamma)$.*

Pour ce faire, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.19. *Soit U un sous-ensemble ouvert de $\mathbb{R}^k$ et $L : TU \longrightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangien de classe C^1 convexe dans les fibres et superlinéaire au-dessus des sous-ensembles compacts de U. Soit $C \geq 0$ une constante, K un sous-ensemble compact de U et $\epsilon > 0$. Alors il existe une constante $\eta > 0$ telle que pour tout $x, y \in U$ avec $x \in K$ et $\|x - y\| < \eta$ et pour tout $v, w \in \mathbb{R}^k$ avec $\|v\| \leq C$, nous avons*

$$L(y, w) \geq L(x, v) + \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)(w - v) - \epsilon.$$

Démonstration. Choisissons $\eta_0 > 0$ de telle sorte que l'ensemble

$$V_{\eta_0} := \{y \in \mathbb{R}^k \mid \exists x \in K : \|x - y\| \leq \eta_0\}$$

soit contenu dans l'ouvert U. Il est clair que V_{η_0} est un ensemble borné et il suffit de voir qu'il est fermé pour prouver qu'il est compact dans U. Soit pour cela une suite y_n dans V_{η_0} qui converge vers un certain $y \in \mathbb{R}^k$. Alors il existe une suite x_n dans K tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|x_n - y_n\| \leq \eta_0$. Puisque K est compact, la suite x_n admet une sous-suite x_{n_j} qui converge vers un certain $x \in K$. Mais alors $\|x - y\| = \lim_{j\to+\infty} \|x_{n_j} - y_{n_j}\| \leq \eta_0$ et donc $y \in V_{\eta_0}$. Ainsi, l'ensemble V_{η_0} est compact.

Définissons la constante positive

$$A := \sup \left\{ \left\| \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \right\| : x \in K, \|v\| \leq C \right\}.$$

Par compacité et par continuité de la dérivée, A est une constante finie. Puisque le Lagrangien L est superlinéaire au-dessus des compacts de U, nous pouvons choisir une constante $C(A) > -\infty$ telle que

$$\forall y \in V_{\eta_0}, \forall w \in \mathbb{R}^k, L(y, w) \geq (A + 1)\|w\| + C(A).$$

Définissons aussi la constante

$$C' := \sup \left\{ L(x, v) - \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)\,(v) \ \mid x \in K, \|v\| \leq C \right\}$$

qui est finie par continuité et compacité. Alors pour tout $y \in V_{\eta_0}$, $x \in K$ et tous $v, w \in \mathbb{R}^k$ avec $\|v\| \leq C$ et $\|w\| \geq C' - C(A)$, nous avons

$$\begin{aligned} L(y, w) \geq (A + 1)\|w\| + C(A) \geq A\|w\| + C' \geq \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)\,(w) + L(x, v) - \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)\,(v) \\ = L(x, v) + \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)\,(w - v)\,. \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer le résultat pour $\|w\| \leq C' - C(A)$. Par convexité dans les fibres de L et puisque L est de classe C^1, nous savons par Corollaire 1.11 que pour tout $v \in \mathbb{R}^k$,

$$L(x, w) - L(x, v) \geq \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)\,(w - v)\,.$$

Cette inégalité reste vraie dans le compact $K' = \{(x, v, w) \mid x \in V_{\eta_0}, \|v\| \leq C, \|w\| \leq C' - C(A)\}$. Considérons la fonction f définie par $(x, v, w) \mapsto L(x, v) + \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)\,(w - v)$. Cette fonction est uniformément continue sur K' par compacité et donc pour $\epsilon > 0$ fixé, il existe $\eta > 0$ que nous pouvons prendre inférieur à η_0 et qui est tel que pour tout $x, y \in U$ avec $x \in K$ et $\|x - y\| \leq \eta$, pour tout $v, w \in \mathbb{R}^k$ tels que $\|v\| \leq C$ et $\|w\| \leq C' - C(A)$, nous avons $|f(x, v, w) - f(y, v, w)| < \epsilon$. Ainsi, nous obtenons

$$L(y, w) \geq L(y, v) + \frac{\partial L}{\partial v}(y, v)\,(w - v) = f(y, v, w) > f(x, v, w) - \epsilon = L(x, v) + \frac{\partial L}{\partial v}(x, v)\,(w - v) - \epsilon$$

ce qui achève la preuve. $\square$

Démonstration de Théorème 2.18. Nous commençons par montrer qu'il suffit de traiter le cas où M est un ouvert de $\mathbb{R}^k$ avec $k = \dim(M)$. Nous noterons d la distance Riemannienne sur M induite par g.

Remarquons que l'ensemble $K := \gamma([a, b]) \cup \left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \gamma_n([a, b])\right) \subset M$ est compact dans M. En effet, soit $\mathcal{U}$ un recouvrement ouvert de K. Puisque la convergence de la suite γ_n vers γ est uniforme, la courbe γ est continue et par conséquent $\gamma([a, b])$ est compact. Comme $\mathcal{U}$ recouvre $\gamma([a, b])$, nous pouvons extraire un sous-recouvrement fini $\{U_1, \ldots, U_p\} \subset \mathcal{U}$ tel que $\gamma([a, b]) \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_i$. Par convergence uniforme de la suite γ_n, nous avons que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un rang $n_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq n_\epsilon$ implique que $d(\gamma_n(t), \gamma(t)) < \epsilon$ pour tout $t \in [a, b]$. En particulier, si nous définissons $\epsilon := \min\limits_{1 \leq i \leq p} d(\gamma, \partial \overline{U}_i) > 0$, alors pour tout $n \geq n_\epsilon$, $\gamma_n([a, b]) \subset \bigcup_{i=1}^{p} U_i$. Par compacité de l'union finie de compacts $\bigcup_{n < n_\epsilon} \gamma_n([a, b])$, il existe un sous-recouvrement fini $\{V_1, \ldots, V_r\} \subset \mathcal{U}$ tel que $\bigcup_{n < n_\epsilon} \gamma_n([a, b]) \subset \bigcup_{i=1}^{r} V_i$. Ainsi,

$$K \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} U_i\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{r} V_i\right)$$

et donc K est compact.

Soit $a' < b'$ tels que $[a', b'] \subset [a, b]$. Par compacité de l'ensemble K, nous pouvons utiliser la superlinéarité de L au-dessus des compacts de M pour la constante 0 afin de choisir $C_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall s \in [a, b] \setminus [a', b'], L(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s)) \geq C_0.$$

Nous avons alors

$$\mathbb{L}(\gamma_n|_{[a', b']}) = \mathbb{L}(\gamma_n) - \int_{[a,b] \setminus [a', b']} L(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s))\,\mathrm{d}s \leq \mathbb{L}(\gamma_n) - C_0[(b - a) - (b' - a')],$$

et puisque par hypothèse $\liminf\limits_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) < +\infty$, nous obtenons

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n|_{[a',b']}) < +\infty. \tag{2.19.1}$$

Choisissons un atlas $\{(\theta_i, U_i) | i \in I\}$ de M où I est un ensemble d'indices. Par compacité de $\gamma([a,b])$, il existe un ensemble $\{U_1, \ldots, U_p\}$ de domaines de cartes locales de M tel que $\gamma([a,b]) \subset \bigcup_{i=1}^p U_i$. Il existe alors une partition $a = a_0 < \ldots < a_p = b$ de l'intervalle $[a,b]$ tel que $\gamma|_{[a_{i-1},a_i]} \subset U_i$ pour tout $i = 1, \ldots, p$. Grâce à la convergence uniforme nous pouvons, quitte à retirer un nombre fini de courbes, supposer que $\gamma_n|_{[a_{i-1},a_i]} \subset U_i$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $i = 1, \ldots, p$. Par Équation 2.19.1, nous avons que pour tout n et tout i,

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n|_{[a_{i-1},a_i]}) < +\infty.$$

Il suffit alors de montrer le résultat pour les courbes $\gamma_n|_{[a_{i-1},a_i]}$ car $\liminf\limits_{n\to+\infty}(x_n + y_n) \geq \liminf\limits_{n\to+\infty} x_n + \liminf\limits_{n\to+\infty} y_n$ pour des suites réelles x_n et y_n et donc nous aurons

$$\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) = \liminf_{n\to+\infty} \left(\sum_{i=1}^p \mathbb{L}(\gamma_n|_{[a_{i-1},a_i]}) \right) \geq \sum_{i=1}^p \liminf_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n|_{[a_{i-1},a_i]}) \geq \mathbb{L}(\gamma).$$

Finalement, puisque chaque U_i est le domaine d'une carte locale de M, nous voyons qu'il suffit de montrer le résultat dans le cas où $M = U$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et $k = \dim(M)$.

Désormais, $M = U$ avec U un ouvert de $\mathbb{R}^k$ et $k = \dim(M)$ et par conséquent $TU = U \times \mathbb{R}^k$. Nous supposons que $\gamma([a,b]) \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \gamma_n([a,b])\right) \subset K_0 \subset U$ avec K_0 compact. Posons $\ell := \liminf\limits_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n)$. Quitte à prendre une sous-suite de $\mathbb{L}(\gamma_n)$ qui converge vers ℓ et à enlever les premières courbes si nécessaire, nous pouvons directement supposer que

$$\mathbb{L}(\gamma_n) \to \ell \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{L}(\gamma_n) \leq \ell + 1 < +\infty.$$

Nous montrerons d'abord que la suite $\dot\gamma_n$ est uniformément intégrable en vue d'appliquer Proposition 2.2. Nous aurons alors que $\gamma \in C^{ac}([a,b], M)$ et que $\dot\gamma_n$ converge vers $\dot\gamma$ dans la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$. Nous montrerons finalement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) \geq \mathbb{L}(\gamma)$.

Montrons que la suite des dérivées $\dot\gamma_n$ est uniformément intégrable. Par superlinéarité au-dessus des compacts de L pour la constante 0, il existe $C(0) > -\infty$ tel que pour tout $x \in K_0$, pour tout $v \in \mathbb{R}^k$, $L(x,v) \geq C(0)$. Fixons $\epsilon > 0$ et choisissons $A > 0$ tel que

$$\frac{\ell + 1 - C(0)(b-a)}{A} < \frac{\epsilon}{2}.$$

En appliquant la superlinéarité de L pour la constante A, nous pouvons choisir $C(A) > -\infty$ tel que pour tout $x \in K_0$, pour tout $v \in \mathbb{R}^k$, $L(x,v) \geq A\|v\| + C(A)$.

Soit $E \subset [a,b]$ un ensemble mesurable. Alors

$$\int_E L(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s))\, \mathrm{d}s \geq A \int_E \|\dot{\gamma}_n(s)\|\, \mathrm{d}s + C(A)m(E),$$
$$\int_{[a,b]\setminus E} L(\gamma_n(s), \dot{\gamma}_n(s))\, \mathrm{d}s \geq C(0)[(b-a) - m(E)].$$

En sommant les deux inégalités et en utilisant $\ell + 1 \geq \mathbb{L}(\gamma_n)$, nous obtenons

$$\ell + 1 \geq \mathbb{L}(\gamma_n) \geq A \int_E \|\dot{\gamma}_n(s)\|\, \mathrm{d}s + [C(A) - C(0)]m(E) + C(0)(b-a)$$

et ainsi

$$\int_E \|\dot{\gamma}_n(s)\|\, \mathrm{d}s \leq \frac{\ell + 1 - C(0)(b-a)}{A} + \frac{[C(0) - C(A)]m(E)}{A} < \frac{\epsilon}{2} + \frac{[C(0) - C(A)]m(E)}{A}.$$

Choisissons $\delta > 0$ de telle sorte que $[C(0) - C(A)]\delta/A < \epsilon/2$. Alors nous obtenons

$$m(E) < \delta \implies \int_E \|\dot{\gamma}_n(s)\|\, \mathrm{d}s < \epsilon$$

et donc $\dot{\gamma}_n$ est uniformément intégrable.

Par Proposition 2.2, $\gamma \in C^{ac}([a,b], U)$ (ainsi sa dérivée existe presque partout) et $\dot{\gamma}_n$ converge vers $\dot{\gamma}$ dans la topologie faible $\sigma(L^1, L^\infty)$.

Montrons que $\lim_{n \to +\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) \geq \mathbb{L}(\gamma)$. Fixons une constante C et considérons l'ensemble

$$E_C := \{t \in [a,b] \ : \ \|\dot{\gamma}(t)\| \leq C\}.$$

Fixons $\epsilon > 0$. Par Lemme 2.19, il existe $\eta > 0$ tel que pour tout $x, y \in U$ avec $x \in K_0$, $\|x - y\| < \eta$ et pour tout $v, w \in \mathbb{R}^k$ avec $\|v\| \leq C$,

$$L(y,w) \geq L(x,v) + \frac{\partial L}{\partial v}(x,v)\,(w - v) - \epsilon.$$

Par convergence uniforme de γ_n vers γ, il existe un certain rang n_0 tel que

$$\forall n \geq n_0, \|\gamma_n(t) - \gamma(t)\| < \eta, \forall t \in [a,b].$$

Ainsi, pour tout $n \geq n_0$ et pour tout $t \in E_C$,

$$L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t)) \geq L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\,(\dot{\gamma}_n(t) - \dot{\gamma}(t)) - \epsilon.$$

Nous en déduisons que pour tout $n \geq n_0$,

$$\mathbb{L}(\gamma_n) = \int_{E_C} L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t))\, \mathrm{d}t + \int_{[a,b]\setminus E_C} L(\gamma_n(t), \dot{\gamma}_n(t))\, \mathrm{d}t$$
$$\geq \int_{E_C} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\, \mathrm{d}t + \int_{E_C} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\,(\dot{\gamma}_n(t) - \dot{\gamma}(t))\ \mathrm{d}t - \epsilon m(E_C) + C(0)[(b-a) - m(E_C)].$$

Puisque $\|\dot\gamma(t)\| \leq C$ pour tout $t \in E_C$, nous remarquons que la fonction de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^{k*}$ définie par $t \mapsto \chi_{E_C}(t)\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))$ est bornée et appartient donc à $L^\infty([a,b],\mathbb{R}^{k*})$. Comme $\dot\gamma_n$ converge vers $\dot\gamma$ dans la topologie faible $\sigma(L^1,L^\infty)$, il s'ensuit que

$$\int_{E_C} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\,(\dot\gamma_n(t)-\dot\gamma(t))\ \mathrm{d}t \to 0,\ \text{lorsque } n \to +\infty.$$

Donc, en laissant $n \to +\infty$, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) \geq \int_{E_C} L(\gamma(t),\dot\gamma(t))\ \mathrm{d}t - \epsilon m(E_C) + C(0)[(b-a)-m(E_C)].$$

Puisque ϵ est arbitraire, en laissant $\epsilon \to 0$, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) \geq \int_{E_C} L(\gamma(t),\dot\gamma(t))\ \mathrm{d}t + C(0)[(b-a)-m(E_C)].$$

Finalement, puisque $\dot\gamma$ existe et est finie presque partout, nous avons $E_C \nearrow E_\infty$ lorsque $C \nearrow +\infty$ et $m([a,b]\setminus E_\infty)=0$. Puisque $L(\gamma(t),\dot\gamma(t)) \geq C(0)$, nous avons que la suite de fonctions $f_C(t) = \chi_{E_C}(t)(L(\gamma(t),\dot\gamma(t)) - C(0))$ est monotone croissante et donc par le théorème de la convergence monotone,

$$\int_{E_C} L(\gamma(t),\dot\gamma(t)) - C(0)\ \mathrm{d}t \to \int_a^b L(\gamma(t),\dot\gamma(t)) - C(0)\ \mathrm{d}t,\ \text{lorsque } C \nearrow +\infty.$$

Ainsi, en laissant $C \nearrow +\infty$, nous obtenons

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) \geq \int_a^b L(\gamma(t),\dot\gamma(t))\ \mathrm{d}t = \mathbb{L}(\gamma),$$

ce qui achève la preuve. □

Exemple 2.20. Nous donnons un exemple dans lequel l'inégalité de Théorème 2.18 est stricte. Prenons $M = \mathbb{R}$ et définissons $L : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ par $L(x,v) = v^2$. Alors L est C^1, convexe dans les fibres et superlinéaire. Définissons la suite $\gamma_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ par $\gamma_n(t) = \frac{1}{n}\sin(nt)$. Cette suite converge uniformément vers 0. Calculons

$$\mathbb{L}(\gamma_n) = \int_0^1 [\dot\gamma_n(t)]^2\ \mathrm{d}t = \int_0^1 [\cos(nt)]^2\ \mathrm{d}t = \int_0^1 \frac{1+\cos(2nt)}{2}\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}(1+\frac{\sin(2n)}{2n}) \to \frac{1}{2}, n \to +\infty.$$

Nous remarquons que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) > 0 = \mathbb{L}(\gamma)$.

Corollaire 2.21. *Soit $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangien de classe C^1 que nous supposons convexe dans les fibres et superlinéaire au-dessus des sous-ensembles compacts de la variété M. Alors l'action $\mathbb{L} : C^{ac}([a,b],M) \longrightarrow \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est semi-continue inférieurement pour la topologie de la convergence uniforme sur $C^{ac}([a,b],M)$.*

Démonstration. Il s'agit de voir que si γ_n est une suite de courbes dans $C^{ac}([a,b],M)$ qui converge uniformément vers $\gamma \in C^{ac}([a,b],M)$, alors $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) \geq \mathbb{L}(\gamma)$. Si $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) = +\infty$, alors il n'y a rien à montrer. Le cas où $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) < +\infty$ est une conséquence immédiate du Théorème 2.18. ☐

2.22. Ce corollaire nous dit en particulier que l'action $\mathbb{L}$ atteint son infimum sur tout sous-ensemble compact de $C^{ac}([a,b],M)$. En effet, soit $K \subset C^{ac}([a,b],M)$ compact et posons $M := \inf \mathbb{L}(\gamma)$, où l'infimum est pris sur K. Soit γ_n une suite dans K telle que $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) = M$. Par compacité, il existe une sous suite γ_{n_j} qui converge vers un certain $\gamma \in K$ dans la topologie de la convergence uniforme. Par semi-continuité inférieure de l'action $\mathbb{L}$, nous avons $M = \liminf_{j\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_{n_j}) \geq \mathbb{L}(\gamma)$ et par définition de l'infimum, nous avons en fait égalité. Ainsi, il existe un solution au problème de minimisation d'action de courbe dans le compact K.

2.2.2 Théorèmes de compacité de Tonelli

Nous énonçons et prouvons deux théorèmes de compacité dus à Tonelli.

Théorème 2.23. *Soit $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangien de classe C^1 que nous supposons convexe dans les fibres et superlinéaire au-dessus des sous-ensembles compacts de la variété Riemannienne (M,g). Si $K \subset M$ est compact et $C \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble*

$$\Sigma_{K,C} := \{\gamma \in C^{ac}([a,b],M) \mid \gamma([a,b]) \subset K, \mathbb{L}(\gamma) \leq C\}$$

est compact dans $C^{ac}([a,b],M)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Démonstration. Commençons par montrer que $\Sigma_{K,C}$ est fermé dans $C^{ac}([a,b],M)$. Considérons pour cela une suite γ_n dans $\Sigma_{K,C}$ qui converge uniformément vers une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$. Par Théorème 2.18, $\gamma \in C^{ac}([a,b],M)$ et $\liminf_{n\to+\infty} \mathbb{L}(\gamma_n) \geq \mathbb{L}(\gamma)$. Comme $\mathbb{L}(\gamma_n) \leq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, il est clair que $\mathbb{L}(\gamma) \leq C$. De plus, pour tout $t \in [a,b]$, la suite $\gamma_n(t)$ converge vers $\gamma(t)$ et par compacité de K, $\gamma(t) \in K$. Ainsi, $\gamma([a,b]) \subset K$ et il s'ensuit que $\gamma \in \Sigma_{K,C}$. Donc $\Sigma_{K,C}$ est fermé.

Puisque pour tout $t \in [a,b]$, l'ensemble $\overline{\{\gamma(t) \mid \gamma \in \Sigma_{K,C}\}}$ est fermé et inclus dans le compact K, il est compact. Ainsi, par le Théorème d'Ascoli-Arzéla, il suffit de prouver que $\Sigma_{K,C}$ est équicontinue pour avoir que $\overline{\Sigma_{K,C}} = \Sigma_{K,C}$ est compact.

Nous prouvons l'équicontinuité. Par superlinéarité de L au-dessus de K, nous avons pour toute constante $A \geq 0$ l'existence de $C(A) > -\infty$ tel que

$$\forall x \in K, \forall v \in T_xM, L(x,v) \geq A\|v\|_x + C(A).$$

En particulier, puisque $\gamma([a,b]) \subset K$, il vient

$$\forall t \in [a,b],\ L(\gamma(t),\dot\gamma(t)) \geq A\|\dot\gamma(t)\|_{\gamma(t)} + C(A).$$

Nous intégrons entre t et t' dans $[a,b]$ avec $t < t'$ pour obtenir

$$\int_t^{t'} L(\gamma(s),\dot\gamma(s))\,\mathrm{d}s \geq A\int_t^{t'} \|\dot\gamma(s)\|_{\gamma(s)}\,\mathrm{d}s + C(A)(t'-t)$$
$$\int_{[a,b]\setminus[t,t']} L(\gamma(s),\dot\gamma(s))\,\mathrm{d}s \geq C(0)[(b-a)-(t'-t)].$$

En sommant ces deux inégalités et en utilisant $\mathbb{L}(\gamma) \leq C$, nous obtenons

$$\int_t^{t'} \|\dot\gamma(s)\|_{\gamma(s)}\,\mathrm{d}s \leq \frac{(C(0)-C(A))(t'-t)}{A} + \frac{C - C(0)(b-a)}{A}.$$

Par Lemme 2.12, nous avons

$$d(\gamma(t'),\gamma(t)) \leq \frac{(C(0)-C(A))(t'-t)}{A} + \frac{C - C(0)(b-a)}{A}.$$

Fixons $\epsilon > 0$ et choisissons la constante A de telle sorte à avoir $(C - C(0)(b-a))/A < \epsilon/2$ et choisissons $\delta > 0$ tel que $(C(0)-C(A))\delta/A < \epsilon/2$. Alors

$$t' - t < \delta \implies d(\gamma(t'),\gamma(t)) < \epsilon$$

et nous avons prouver l'équicontinuité. □

Avant de prouver le deuxième théorème de compacité du à Tonelli, nous énonçons et prouvons un résultat classique de topologie provenant de [Mu00], voir Théorème 45.1. Nous commençons par une définition.

Définition 2.24. Un espace métrique (X,d) est dit *totalement borné* si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de X par des ϵ-boules.

Théorème 2.25. *Un espace métrique (X,d) est compact si et seulement si il est complet et totalement borné.*

Démonstration. Supposons (X,d) compact. Montrons l'assertion suivante : si toute suite de Cauchy dans (X,d) admet une sous-suite convergente, alors (X,d) est complet. Puisque (X,d) compact équivaut à (X,d) séquentiellement compact, il est clair que si l'assertion est vraie, alors (X,d) est complet.

Prouvons désormais l'assertion. Soient pour cela x_n une suite de Cauchy et x_{n_j} une sous-suite de x_n qui converge vers un certain $x \in X$. Fixons $\epsilon > 0$ et soit $N \in \mathbb{N}$ tel que $d(x_n, x_m) < \epsilon/2, \forall n, m \geq N$ et soit $j \in \mathbb{N}$ suffisamment grand pour que $d(x_{n_k}, x) < \epsilon/2, \forall k \geq j$. Prenons alors $\ell \geq j$ tel que $n_\ell \geq N$ (nous prenons la suite n_i croissante). Alors $\forall k \geq \ell$ et $\forall n \geq N$, nous avons par l'inégalité du triangle,

$$d(x_n, x) \leq d(x_n, x_{n_\ell}) + d(x_{n_\ell}, x) < \epsilon$$

et par conséquent x_n converge vers x et (X,d) est complet. Ainsi, l'assertion est démontrée.

Le fait que (X,d) est totalement borné est une conséquence directe du fait que (X,d) est compact et donc nous avons démontré le sens direct du théorème.

Pour la réciproque, supposons (X,d) complet et totalement borné et montrons que (X,d) est séquentiellement compact. Soit pour cela x_n une suite quelconque dans X. Nous allons construire une sous-suite x_{n_j} de x_n qui est de Cauchy. Commençons par recouvrir X par un nombre fini de boules de rayon 1. Puisque le nombre de boules est fini, il en existe au moins une, disons B_1, qui contient une infinité de termes de la suite x_n (principe des tiroirs de Dirichlet). Définissons alors l'ensemble d'indices $J_1 := \{n \mid x_n \in B_1\}$. Recouvrons désormais X par un nombre fini de boules de rayon $1/2$. Puisque B_1 contient une infinité de termes de la suite, il existe au moins une boule de rayon $1/2$, disons B_2, qui contient une infinité de termes de x_n avec $n \in J_1$. Définissons alors l'ensemble d'indices $J_2 := \{n \mid n \in J_1, x_n \in B_2\}$. Par récurrence, si J_k est un ensemble d'indices infini, alors nous définissons J_{k+1} comme étant un sous-ensemble de J_k qui contient une infinité d'indices n tel que x_n est contenu dans une boule B_{k+1} de rayon $1/(k+1)$.

Soit $n_1 \in J_1$. Par récurrence, si $n_k \in J_k$, prenons $n_{k+1} \in J_{k+1}$ avec $n_{k+1} > n_k$, ce qui est possible puisque J_{k+1} est infini. Si $i,j \geq k$, alors $n_i, n_j \in J_k$ puisque $\ldots \subset J_2 \subset J_1$. Ainsi, x_{n_i} et x_{n_j} sont contenus dans une boule de rayon $1/k$ et donc $d(x_{n_i}, x_{n_j}) \leq 2/k$. Donc x_{n_ℓ} est bien une sous-suite de Cauchy de x_n et converge donc dans l'espace complet (X,d). Il s'ensuit que (X,d) est séquentiellement compact et donc compact comme souhaité. □

Après cette courte digression topologique, nous sommes en mesure de prouver le second résultat de compacité de Tonelli. D'abord, il nous faut une définition.

Définition 2.26. Un Lagrangien $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ défini sur le fibré tangent d'une variété Riemannienne (M,g) est dite *borné par dessous* par g si il existe une constante $C' \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x,v) \in TM,\ L(x,v) \geq \|v\|_x + C'.$$

2.27. Si M est une variété compacte, alors la superlinéarité au-dessus des compacts de L garantit que L est bornée par dessous.

Théorème 2.28. *Soit $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangien de classe C^1 défini sur le fibré tangent d'une variété Riemannienne (M,g). Supposons la métrique Riemannienne g complète et le Lagrangien L convexe dans les fibres, superlinéaire au-dessus des compacts de M et bornée par dessous par g. Si K est un sous-ensemble compact de M et $C \in \mathbb{R}$, alors l'ensemble*

$$\widetilde{\Sigma}_{K,C} = \{\gamma \in C^{ac}([a,b],M) \mid \gamma([a,b]) \cap K \neq \emptyset, \mathbb{L}(\gamma) \leq C\}$$

est compact dans $C^{ac}([a,b],M)$ muni de la topologie de la convergence uniforme.

Démonstration. Soit $r < +\infty$ et définissons l'ensemble $\overline{V}_r = \{y \in M \mid \exists x \in K, d(x, y) \leq r\}$. Montrons que nous pouvons choisir r de telle sorte à avoir $\gamma([a, b]) \subset \overline{V}_r$ pour tout $\gamma \in \widetilde{\Sigma}_{K,C}$. Puisque L est borné par dessous par la métrique Riemannienne g, nous avons l'existence d'une constante $C' \in \mathbb{R}$ telle que

$$\forall (x, v) \in TM,\ L(x, v) \geq \|v\|_x + C'.$$

En particulier, pour tout $s \in [a, b], L(\gamma(s), \dot{\gamma}(s)) \geq \|\dot{\gamma}(s)\|_{\gamma(s)} + C'$. Soient $t, t' \in [a, b], t \leq t'$ et intégrons l'inégalité précédente entre t et t' pour obtenir

$$\int_t^{t'} \|\dot{\gamma}(s)\|_{\gamma(s)}\, \mathrm{d}s \leq \mathbb{L}(\gamma) + C'(t - t') \leq C + |C'|(t' - t) \leq C + |C'|(b - a).$$

Par Lemme 2.12, il vient

$$d(\gamma(t), \gamma(t')) \leq C + |C'|(b - a).$$

Si nous fixons t, l'inégalité vaut pour tout $t' \in [a, b]$. Puisque $\gamma([a, b]) \cap K \neq \emptyset$, nous pouvons choisir $t_0 \in [a, b]$ tel que $\gamma(t_0) \in K$. De plus, $d(\gamma(t), \gamma(t_0)) \leq C + |C'|(b - a)$ et donc en prenant $r = C + |C'|(b - a)$, nous obtenons $\gamma(t) \in \overline{V}_r$. Puisque t est arbitraire, $\gamma([a, b]) \subset \overline{V}_r$.

Le but est désormais de montrer que $\overline{V}_r$ est compact. Commençons par montrer que $\overline{V}_r$ est fermé. Soit pour cela une suite y_n dans $\overline{V}_r$ qui converge vers un certain $y \in M$. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $x_n \in K$ tel que $d(x_n, y_n) \leq r$. Puisque K est compact et donc séquentiellement compact, il existe une sous-suite x_{n_j} de x_n qui converge vers un certain $x \in K$. Bien entendu, la sous-suite y_{n_j} converge vers y. Ainsi, $d(x, y) = \lim_{j \to \infty} d(x_{n_j}, y_{n_j}) \leq r$ et donc $y \in \overline{V}_r$ et $\overline{V}_r$ est fermé. Par conséquent, $(\overline{V}_r, d)$ est complet en tant que sous-espace fermé de l'espace complet (M, d).

Montrons que $\overline{V}_r$ est totalement borné. Fixons $\epsilon > 0$ et recouvrons $\overline{V}_r$ par des ϵ-boules. En particulier, K est recouvert par ces boules et par compacité, il existe $x_1, \ldots, x_n \in K$ tel que $K \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \epsilon)$. Pour tout $k = 1, \ldots, n$, nous avons par le Théorème de Hopf-Rinow que la boule fermée $\overline{B}(x_k, \epsilon + r)$ est compacte. Pour une preuve de ce théorème, voir Théorème 1.4.8 de [Jo02]. Ainsi, puisque $\overline{B}(x_k, \epsilon + r)$ est recouverte par les ϵ-boules, il existe un ensemble d'indices fini I_k tel que $\overline{B}(x_k, \epsilon + r) \subset \bigcup_{x \in I_k} B(x, \epsilon)$. Mais alors

$$\overline{V}_r \subset \bigcup_{k=1}^n \bigcup_{x \in I_k} B(x, \epsilon).$$

En effet, si $y \in \overline{V}_r$, alors il existe $x \in K$ tel que $d(x, y) \leq r$. Puisque $x \in K$, il existe $1 \leq k \leq n$ tel que $x \in B(x_k, \epsilon)$. Alors, par l'inégalité du triangle,

$$d(x_k, y) \leq d(x_k, x) + d(x, y) < \epsilon + r$$

et donc $y \in B(x_k, \epsilon + r) \subset \overline{B}(x_k, \epsilon + r) \subset \bigcup_{x \in I_k} B(x, \epsilon)$. Ainsi, nous avons démontré que $\overline{V}_r$ est totalement borné.

Par Théorème 2.25, $\overline{V}_r$ est compact. Par Théorème 2.23, l'ensemble $\Sigma_{\overline{V}_r, C}$ est compact dans $C^{ac}([a, b], M)$. Par ce qui précède, nous avons $\widetilde{\Sigma}_{K,C} \subset \Sigma_{\overline{V}_r, C}$. Nous prétendons que $\widetilde{\Sigma}_{K,C}$ est fermé.

Soit pour cela une suite γ_n dans $\widetilde{\Sigma}_{K,C}$ qui converge uniformément vers $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$. Par les mêmes arguments que nous avons utilisé dans la preuve de Théorème 2.23, $\gamma \in C^{ac}([a,b],M)$ et $\mathbb{L}(\gamma) \leq C$. Ainsi, il reste seulement à montrer que $\gamma([a,b]) \cap K \neq \emptyset$. Puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n([a,b]) \cap K \neq \emptyset$, il existe une suite x_n dans $[a,b]$ telle que $\{\gamma_n(x_n) \mid n \in \mathbb{N}\} \subset K$. Puisque $[a,b]$ est séquentiellement compact, il existe une sous-suite x_{n_j} qui converge vers $x \in [a,b]$. De même, puisque K est séquentiellement compact et $\{\gamma_{n_j}(x_{n_j}) \mid j \in \mathbb{N}\} \subset K$, il existe une sous-suite $\gamma_{n_{j_k}}(x_{n_{j_k}})$ qui converge dans K. Or, par l'inégalité du triangle

$$d(\gamma(x), \gamma_{n_{j_k}}(x_{n_{j_k}})) \leq d(\gamma(x), \gamma(x_{n_{j_k}})) + d(\gamma(x_{n_{j_k}}), \gamma_{n_{j_k}}(x_{n_{j_k}})) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

par continuité de γ et convergence de γ_n vers γ. Ainsi, $\gamma(x) = \lim_{k\to\infty} \gamma_{n_{j_k}}(x_{n_{j_k}}) \in K$ et donc $\widetilde{\Sigma}_{K,C}$ est fermé et donc compact car sous-ensemble fermé d'un compact. $\square$

2.2.3 Existence de minimiseurs de Tonelli

Nous sommes désormais en mesure de prouver le théorème d'existence de solutions au problème de Tonelli mentionné dans l'introduction.

Théorème 2.29 (Tonelli)**.** *Soit M une variété connexe que nous munissons d'une métrique Riemannienne g complète. Soit $L : TM \longrightarrow \mathbb{R}$ un Lagrangien de classe C^1 convexe dans les fibres, superlinéaire au-dessus des compacts de M et bornée par dessous par g. Alors pour tout $x, y \in M$ et tout $a < b \in \mathbb{R}$, il existe une courbe absolument continue $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ avec $\gamma(a) = x$, $\gamma(b) = y$ qui est un minimiseur pour $C^{ac}([a,b],M)$.*

Démonstration. Définissons la quantité $C_{\text{inf}} := \inf \mathbb{L}(\gamma)$, où l'infimum est pris sur l'ensemble des courbes absolument continues de $[a,b]$ dans M vérifiant $\gamma(a) = x$ et $\gamma(b) = y$. Puisque M est connexe, il existe une courbe $\gamma \in C^\infty_{\text{morc}}([a,b],M)$ reliant x à y qui est donc telle que $\mathbb{L}(\gamma) < +\infty$ (voir le début de la preuve de Proposition 1.21). Ainsi, $C_{\text{inf}} < +\infty$. Définissons pour $n \in \mathbb{N}$ les ensembles

$$\mathcal{C}_n := \{\gamma \in C^{ac}([a,b],M) \mid \gamma(a) = x, \gamma(b) = y, \mathbb{L}(\gamma) \leq C_{\text{inf}} + 1/n\}.$$

Par définition de l'infimum, ces ensembles sont tous non vides et la suite des $\mathcal{C}_n$ est décroissante. De plus, pour chaque $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble $\mathcal{C}_n$ est fermé et inclus dans $\widetilde{\Sigma}_{\{x,y\},C_{\text{inf}}+1/n}$ qui est compact par Théorème 2.28 et donc chaque $\mathcal{C}_n$ est compact. Par la Propriété de l'Intersection Finie, $\bigcap_{n=1}^\infty \mathcal{C}_n \neq \emptyset$. Toutes les courbes γ appartenant à cette intersection vérifient $\mathbb{L}(\gamma) = C_{\text{inf}}$ et sont donc des minimiseurs. $\square$

3 Courbes extrémales et équation d'Euler-Lagrange

Après avoir énoncé et prouvé le théorème de Tonelli, ce qui était le but principal de ce travail, nous nous penchons sur la question de la régularité des minimiseurs de Tonelli. Pour se faire, nous étudions d'abord les courbes extrémales de classe C^1_{morc} et montrons que sous de faibles conditions sur le Lagrangien L de classe C^r avec $r \geq 2$, celles-ci sont en fait de classe C^r et doivent par conséquent vérifier l'équation d'Euler-Lagrange. Dans un second temps, nous montrerons que tout courbe qui minimise l'action de L pour une certaine classe de courbes est extrémale. Or, les minimiseurs de Tonelli de la section précédente sont de classe C^{ac} et donc nos résultats sur les courbes extrémales de classe C^1_{morc} ne s'applique donc à priori pas. Nous suivrons tout le long [Fa08].

3.1 Transformée de Legendre globale

Nous commençons par quelques définitions et résultats préliminaires qui seront nécessaires pour la suite. La notion de courbe extrémale sera introduite dans la section suivante.

Définition 3.1. Un Lagrangien L sur M est dit non-dégénéré si pour tout $x \in M$ et tout $v \in T_xM$, $\frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v)$ est non-dégénérée en tant que forme quadratique.

Définition 3.2. Soit L un Lagrangien sur M de classe C^r, $r \geq 1$. Nous appelons *transformée de Legendre globale* de L la fonction $\mathscr{L} : TM \longrightarrow T^*M$ définie par

$$\mathscr{L}(x, v) = (x, \frac{\partial L}{\partial v}(x, v))$$

pour tout $x \in M$ et tout $v \in T_xM$. Cette fonction est bien entendu de classe C^{r-1}.

Théorème 3.3. *Soit L un Lagrangien sur M de classe C^r, $r \geq 1$ et $\mathscr{L}$ sa transformée de Legendre globale. Alors L est non-dégénéré si et seulement si $\mathscr{L}$ est un C^{r-1}-difféomorphisme local.*

Démonstration. Le résultat est de nature locale et nous pouvons donc sans perte de généralité supposer que M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Alors la différentielle de $\mathscr{L}$, $D\mathscr{L} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n*}$, s'écrit matriciellement

$$D\mathscr{L}(x, v) = \begin{pmatrix} \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial v}(x, v) \\ 0 & \frac{\partial^2 L}{\partial v^2}(x, v) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, L est non-dégénérée si et seulement si $D\mathscr{L}$ est inversible. Or, par le Théorème de l'Inversion Locale, $D\mathscr{L}$ est un isomorphisme d'espace vectoriels si et seulement si $\mathscr{L}$ est un C^{r-1}-difféomorphisme local et donc nous avons terminé la preuve. $\square$

Corollaire 3.4. *Soit L un Lagrangien sur M de classe C^r, $r \geq 1$ et $\mathscr{L}$ sa transformée de Legendre globale. Alors L est non-dégénéré et $\mathscr{L}$ est injective si et seulement si $\mathscr{L}$ est un C^{r-1}-difféomorphisme sur son image.*

3.2 Courbes extrémales dans $\mathbb{R}^n$

Dans toute cette section, M désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Nous traiterons le cas d'une variété quelconque dans la prochaine section.

3.2.1 Définition et premières propriétés

Définition 3.5. Une courbe extrémale de classe C^1_{morc} pour un Lagrangien L de M est une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ de classe C^1_{morc} qui vérifie

$$\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma + t\gamma_1)\bigg|_{t=0} = 0$$

pour toute courbe $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ et à support compact dans $]a, b[$.

Pour voir que cette définition fait bien sens, nous avons besoin de la proposition suivante.

Proposition 3.6. *Soit L un Lagrangien sur M de classe C^1. Soient $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ et $\gamma_1 : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ deux courbes de classe C^1_{morc}. Alors la fonction $t \mapsto \mathbb{L}(\gamma + t\gamma_1)$ est bien définie pour t suffisamment petit, et*

$$\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma + t\gamma_1)\bigg|_{t=0} = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\dot{\gamma}_1(t))\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration. Considérons la fonction $\Gamma : [a, b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\Gamma(s, t) = \gamma(s) + t\gamma_1(s).$$

Puisque γ et γ_1 sont continues, Γ est continue et donc uniformément continue sur $[a, b] \times [-1, 1]$. De plus, pour tout $s \in [a, b]$, $\Gamma(s, 0) = \gamma(s) \in M$ et donc il existe $\epsilon > 0$ tel que $\Gamma(s, t) \in M$ pour tout $(s, t) \in [a, b] \times [-\epsilon, \epsilon]$. Donc pour $t \in [-\epsilon, \epsilon]$, l'action de $\gamma + t\gamma_1$ pour L est bien définie.

Considérons la fonction $\lambda : [a, b] \times [-\epsilon, \epsilon] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\lambda(s, t) = L(\gamma(s) + t\gamma_1(s), \dot{\gamma}(s) + t\dot{\gamma}_1(s)).$$

Cette fonction est continue et sa dérivée en t vaut

$$\frac{\partial}{\partial t}\lambda(s, t) = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s) + t\gamma_1(s), \dot{\gamma}(s) + t\dot{\gamma}_1(s))(\gamma_1(s)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(s) + t\gamma_1(s), \dot{\gamma}(s) + t\dot{\gamma}_1(s))(\dot{\gamma}_1(s)).$$

Puisque L est de classe C^1, cette dérivée en t est continue et donc la fonction λ est de classe C^1 dans la variable t. Ainsi, nous pouvons dériver par rapport à t sous le signe de l'intégrale et nous obtenons alors le résultat souhaité. $\square$

3.7. D'après le résultat précédent, une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ de classe C^1_{morc} est extrémale si et seulement si

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))(\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))(\dot{\gamma}_1(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

pour toute courbe $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ et à support compact dans $]a,b[$.

Proposition 3.8. *Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe extrémale de classe C^1_{morc} et $[a',b'] \subset [a,b]$. Alors la restriction $\gamma|_{[a',b']}$ est aussi une courbe extrémale de classe C^1_{morc}.*

Démonstration. Soit $\gamma_1 : [a',b'] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^∞ à support compact dans $]a',b'[$. Alors nous pouvons choisir $\epsilon > 0$ tel que $\gamma_1(t) = 0$ pour tout $t \in [a', a'+\epsilon] \cup [b'-\epsilon, b]$. Prolongeons alors de manière lisse la courbe γ_1 en $\widetilde{\gamma}_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par $\widetilde{\gamma}_1(t) = 0$ pour tout $t \in [a,a'] \cup [b',b]$. Alors cette courbe est de classe C^∞ et nulle dans un voisinage de a et b. Puisque γ est extrémale, nous avons $\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma + t\widetilde{\gamma}_1)|_{t=0} = 0$. Mais $\mathbb{L}(\gamma + t\widetilde{\gamma}_1) - \mathbb{L}(\gamma + t\gamma_1) = \mathbb{L}(\gamma|_{[a,a']}) + \mathbb{L}(\gamma|_{[b',b]})$ et donc $\frac{d}{dt}\mathbb{L}(\gamma + t\gamma_1)|_{t=0} = 0$. Par conséquent, $\gamma|_{[a',b']}$ est extrémale. □

3.2.2 Équation d'Euler-Lagrange

Nous commençons par un lemme préliminaire dû au mathématicien allemand du Bois-Reymond. Nous verrons son utilité dans la preuve du théorème d'Euler-Lagrange.

Lemme 3.9 (du Bois-Reymond)**.** *Soit $A : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{n*}$ une fonction continue telle que*

$$\int_a^b A(t)(\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

pour toute courbe $\gamma_1 \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $]a,b[$. Alors $A(t) = 0$ pour tout $t \in [a,b]$.

Démonstration. Par l'absurde, supposons qu'il existe $t_0 \in [a,b]$ et $v_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que $A(t_0)(v_0) \neq 0$. Quitte à prendre $-v_0$, nous pouvons supposer $A(t_0)(v_0) > 0$. Si $t_0 = a$, alors par continuité de A il existe $t_1 \in]a,b]$ proche de a tel que $A(t_1)(v_0) > 0$. Donc, quitte à choisir t_1 nous pouvons supposer que $t_0 \neq a$ et de même que $t_0 \neq b$. Supposons donc que $t_0 \in]a,b[$. Par continuité de A, il existe $\epsilon > 0$ suffisamment petit pour que $]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[\subset [a,b]$ et tel que $A(t)(v_0) > 0$ pour tout $t \in]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[$. Définissons une courbe $\phi : [a,b] \longrightarrow [0,1]$ de classe C^∞ qui est nulle en dehors de $]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[$ et telle que $\phi(t_0) = 1$. Alors par hypothèse, $\int_a^b A(t)(\phi(t)v_0)\,\mathrm{d}t = 0$. Or, $\int_a^b A(t)(\phi(t)v_0)\,\mathrm{d}t = \int_{t_0-\epsilon}^{t_0+\epsilon} \phi(t)A(t)(v_0)\,\mathrm{d}t$ et la fonction $t \mapsto \phi(t)A(t)(v_0)$ est continue, positive sur $]t_0-\epsilon, t_0+\epsilon[$ et $\phi(t_0)A(t_0)(v_0) > 0$ puisque $\phi(t_0) = 1$. Ainsi, cette intégrale ne peut pas être nulle, d'où la contradiction. □

Théorème 3.10 (Euler-Lagrange). *Soit L un Lagrangien sur M de classe C^2 et $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe de classe C^2. Alors γ est une courbe extrémale si et seulement si pour tout $t \in [a,b]$ elle vérifie l'équation d'Euler-Lagrange*

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\right] = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)).$$

Démonstration. Soit $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^∞ à support compact dans $]a,b[$. Considérons la fonction

$$t \mapsto \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))(\gamma_1(t))$$

qui est bien évidemment de classe C^1 et nulle aux points a et b puisque γ_1 l'est. Par conséquent,

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))(\gamma_1(t))\right] \mathrm{d}t = 0.$$

En développant la dérivée, nous obtenons

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))(\dot{\gamma}_1(t))\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\right](\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t.$$

La courbe γ est extrémale si et seulement si

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))(\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))(\dot{\gamma}_1(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

et donc en remplaçant par ce qui précède, nous avons que γ est extrémale si et seulement si

$$\int_a^b \left\{\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\right]\right\}(\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

pour toute courbe γ_1 de classe C^∞ à support compact dans $]a,b[$. La fonction

$$t \mapsto \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\right]$$

est continue de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}^{n*}$. Ainsi, par Lemme 3.9 de du Bois-Reymond,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t))\right] = \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)),$$

d'où le résultat. □

3.2.3 Régularité des courbes extrémales

Le but du reste de cette section est de montrer que sous de faibles conditions sur le Lagrangien L de classe C^r avec $r \geq 2$, toute courbe extrémale de classe C^1 ou même de classe C^1_{morc} est en fait de classe C^r et doit donc satisfaire l'équation d'Euler-Lagrange.

Avant de pouvoir s'attaquer aux résultats mentionnés dans la remarque nous avons besoin d'une proposition de plus et pour cette proposition, il nous faut un lemme qui est dû à Erdmann.

Lemme 3.11 (Erdmann)**.** *Soit $A : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^{n*}$ une fonction continue telle que $\int_a^b A(t)(\dot\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t = 0$ pour toute courbe $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^∞ à support compact dans $]a,b[$. Alors il existe $p \in \mathbb{R}^{n*}$ tel que $A(t) = p$ pour tout $t \in [a,b]$.*

Démonstration. Soit $\rho : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe C^∞ à support compact dans $]a,b[$ et posons $C := \int_a^b \rho(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^n$. De plus, considérons une courbe $\phi : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ à support compact dans $]a,b[$ et telle que $\int_a^b \phi(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Finalement, définissons la courbe $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\gamma_1(t) = \int_a^t \rho(s) - C\phi(s)\,\mathrm{d}s.$$

Cette courbe est bien de classe C^∞ et s'annule en a et b. Sa dérivée vaut $\dot\gamma_1(t) = \rho(t) - C\phi(t)$. Par hypothèse, $\int_a^b A(t)(\dot\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t = 0$. Ainsi,

$$\int_a^b A(t)(\rho(t))\,\mathrm{d}t - \int_a^b \phi(t)A(t)(C)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Posons $p = \int_a^b \phi(t)A(t)\,\mathrm{d}t \in \mathbb{R}^{n*}$. Alors, l'équation précédente n'est autre que $\int_a^b A(t)(\rho(t))\,\mathrm{d}t - p(C) = 0$. Or, par linéarité, $p(C) = \int_a^b p(\rho(t))\,\mathrm{d}t$. Il s'ensuit que

$$\int_a^b [A(t) - p](\rho(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

et ceci vaut bien évidemment pour toute courbe $\rho \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ à support compact dans $]a,b[$. Par Lemme 3.9 de du Bois-Reymond, $A(t) = p$ et nous avons démontré le résultat. □

Proposition 3.12. *Soit L un Lagrangien de classe C^1 et $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe extrémale de classe C^1. Alors, il existe $p \in \mathbb{R}^{n*}$ tel que pour tout $t \in [a,b]$, l'égalité suivante a lieu :*

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot\gamma(t)) = p + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot\gamma(s))\,\mathrm{d}s.$$

Démonstration. Soit $\gamma_1 : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une courbe de classe C^∞ à support compact dans $]a,b[$ et considérons la fonction

$$t \mapsto \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot\gamma(s))\,\mathrm{d}s(\gamma_1(t)).$$

Cette fonction est bien évidemment C^1 et nulle en a et b. Il s'ensuit que

$$\int_a^b \frac{d}{dt}\left[\int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot\gamma(s)) ds(\gamma_1(t))\right]\,\mathrm{d}t = 0.$$

En développant la dérivée, nous obtenons

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot\gamma(t))(\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t = -\int_a^b \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot\gamma(s))\,\mathrm{d}s(\dot\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t.$$

Puisque γ est extrémale,

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot\gamma(t))(\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot\gamma(t))(\dot\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t = 0$$

et donc, en remplaçant grâce à l'égalité obtenue avant,

$$\int_a^b \left\{ \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) - \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))\, \mathrm{d}s \right\} (\dot{\gamma}_1(t))\, \mathrm{d}t = 0.$$

Ceci est vrai pour toute courbe $\gamma_1 \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ à support compact dans $]a,b[$ et donc Lemme 3.11 d'Erdmann permet de conclure. $\square$

Nous prouvons maintenant un premier théorème de régularité concernant uniquement les courbes extrémales de classe C^1.

Théorème 3.13. *Soit L un Lagrangien non-dégénéré de classe C^r, $r \geq 2$. Alors toute courbe extrémale de classe C^1 est de classe C^r et vérifie donc l'équation d'Euler-Lagrange.*

Démonstration. Fixons $t_0 \in [a,b]$. D'après Théorème 3.3, $\mathscr{L}$ est un C^{r-1}-difféomorphisme local. Soit alors $\mathscr{K}$ l'inverse local de $\mathscr{L}$ dans un voisinage de $\gamma(t_0)$. Alors pour t suffisamment proche de t_0,

$$\mathscr{K}(\mathscr{L}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))) = \mathscr{K}\left(\gamma(t), \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\right) = (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)). \tag{3.13.1}$$

Par Proposition 3.12,

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = p + \int_a^t \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(s), \dot{\gamma}(s))\, \mathrm{d}s.$$

Il est clair que le côté droit de cette équation est de classe C^1. Puisque $\mathscr{K}$ est de classe C^{r-1}, nous avons alors que le terme du milieu de l'équation (3.13.1) est C^1. Par conséquent, $\dot{\gamma}$ est C^1 et donc γ est C^2. Par induction, nous obtenons que $\dot{\gamma}$ est C^{r-1} et donc γ est C^r. $\square$

3.14. La méthode utilisée dans cette preuve est souvent appelée *bootstrap*. Ce genre de méthode est bien connue dans le cadre de démonstrations concernant la régularité d'une fonction.

Théorème 3.15. *Soit L un Lagrangien de classe C^r avec $r \geq 2$ et tel que sa transformée globale de Legendre $\mathscr{L}$ soit un C^{r-1}-difféomorphisme sur son image. Alors toute courbe extrémale de classe C^1_{morc} est de classe C^r.*

Démonstration. Commençons par remarquer que par Corollaire 3.4, L est non-dégénéré et $\mathscr{L}$ est injective.

Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe extrémale de classe C^1_{morc}. Soit $a = a_0 < \ldots < a_n = b$ une partition de l'intervalle $[a,b]$ telle que chaque restriction $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ soit de classe C^1 pour $i = 0, \ldots, n-1$. Puisque une restriction d'une courbe extrémale reste extrémale, nous avons par Théorème 3.13 que $\gamma|_{[a_i, a_{i+1}]}$ est de classe C^r pour tout $i = 0, \ldots, n-1$.

Soit $\gamma_1 \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ à support compact dans $]a,b[$. Maintenant, puisque γ est extrémale, nous avons

$$\int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))(\dot{\gamma}_1(t))\, \mathrm{d}t = 0. \tag{3.15.1}$$

Puisque $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ est de classe au moins C^2, nous pouvons intégrer par partie pour obtenir

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))(\dot\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))(\gamma_1(t))\right]_{a_i}^{a_{i+1}} - \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\right](\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, l'égalité suivante à lieu :

$$\begin{aligned}\int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot\gamma(t))(\gamma_1(t)) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))(\dot\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t &= \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))(\gamma_1(t))\right]_{a_i}^{a_{i+1}} \\ &+ \int_{a_i}^{a_{i+1}} \underbrace{\left\{\frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t),\dot\gamma(t)) - \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t),\dot\gamma(t))\right]\right\}}_{=0 \text{ par Euler-Lagrange } 3.10}(\gamma_1(t))\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

En sommant sur i, l'équation (3.15.1) devient

$$\sum_{i=0}^{n}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a_{i+1}),\dot\gamma_-(a_{i+1}))(\gamma_1(a_{i+1})) - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a_i),\dot\gamma_+(a_i))(\gamma_1(a_i))\right] = 0,$$

où $\dot\gamma_+$ et $\dot\gamma_-$ dénotent respectivement la dérivée de γ à droite et à gauche. Remarquer que cette égalité vaut pour toute courbe $\gamma_1 \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ à support compact dans $]a,b[$. Définissons, pour $i = 0,\dots,n-1$, une courbe $\gamma_i \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^n)$ qui est nulle sur $[a,a_{i-1}]\cup[a_{i+1},b]$ et pour laquelle $\gamma_i(a_i)$ est fixée. Alors l'égalité précédente devient

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a_i),\dot\gamma_+(a_i))(\gamma_i(a_i)) = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a_i),\dot\gamma_-(a_i))(\gamma_i(a_i)).$$

Puisque nous pouvons choisir $\gamma_i(a_i)$ comme nous le souhaitons, nous obtenons

$$\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a_i),\dot\gamma_+(a_i)) = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a_i),\dot\gamma_-(a_i)).$$

Mais puisque $\mathscr{L}$ est injective par hypothèse, nous obtenons que $\dot\gamma_+(a_i) = \dot\gamma_-(a_i)$ pour tout $i = 0,\dots,n-1$ et donc γ est de classe C^1. Théorème 3.13 nous dit alors que γ est de classe C^r et la démonstration est terminée. □

3.2.4 Variation de courbes

Nous donnons une caractérisation des courbes extrémales à travers les variations de courbes en vue d'une généralisation de la notion de courbe extrémale aux variétés quelconques dans la prochaine section. Nous définissons les variations de courbes pour une variété différentiable quelconque et travaillons ensuite dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 3.16. Soit M une variété différentiable quelconque. Considérons une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ de classe C^r. Une variation de classe C^r de la courbe γ est une fonction $\Gamma : [a,b]\times]-\epsilon,\epsilon[\longrightarrow M$ de classe C^r avec $\epsilon > 0$ et qui est telle que $\Gamma(t,0) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [a,b]$. Nous noterons Γ_s la courbe de $[a,b]$ dans M donnée par $\Gamma_s(t) = \Gamma(t,s)$ pour $s \in]-\epsilon,\epsilon[$.

Nous reprenons à partir d'ici la convention selon laquelle M désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Lemme 3.17. *Soit L un Lagrangien sur M de classe C^1 et Γ une variation de classe C^2 à valeurs dans M d'une courbe $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ de classe C^2. Alors la fonction $s \mapsto \mathbb{L}(\Gamma_s)$ est différentiable et sa dérivée en $s = 0$ vaut*

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0)\right) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(t, 0)\right) \mathrm{d}t.$$

Démonstration. Définissons la fonction λ par

$$\lambda(t, s) = L\left(\Gamma(t, s), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s)\right).$$

La dérivée de cette fonction par rapport à s vaut

$$\frac{\partial \lambda}{\partial s}(t, s) = \frac{\partial L}{\partial x}\left(\Gamma(t, s), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s)\right)\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, s)\right) + \frac{\partial L}{\partial v}\left(\Gamma(t, s), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t, s)\right)\left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(t, s)\right)$$

et est clairement continue en vue des hypothèses. Ainsi, λ est de classe C^1 en s et nous pouvons donc dériver sous le signe de l'intégrale pour obtenir le résultat voulu. □

Théorème 3.18. *Soit $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ une courbe extrémale de classe C^2. Alors pour toute variation Γ de classe C^2 de γ,*

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(b), \dot{\gamma}(b)) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a), \dot{\gamma}(a)) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0)\right).$$

Démonstration. Nous avons par le lemme précédent que

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = \int_a^b \frac{\partial L}{\partial x}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0)\right) + \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(t, 0)\right) \mathrm{d}t.$$

En intégrant par parties, nous obtenons

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \left(\frac{\partial^2 \Gamma}{\partial s \partial t}(t, 0)\right) \mathrm{d}t = &\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0)\right)\right]_a^b \\ &- \int_a^b \frac{d}{dt}\left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t))\right]\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0)\right) \mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Puisque γ est extrémale de classe C^2, elle vérifie l'équation d'Euler-Lagrange et donc en injectant l'inégalité précédente dans celle d'avant, nous obtenons

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = \left[\frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(t, 0)\right)\right]_a^b$$

comme souhaité. □

Théorème 3.19. *Une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ de classe C^2 est extrémale si et seulement si $\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = 0$ pour toute variation Γ de γ de classe C^2 telle que $\Gamma(a,s) = \gamma(a)$ et $\Gamma(b,s) = \gamma(b)$ pour tout s dans un voisinage proche de 0.*

Démonstration. Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe extrémale de classe C^2. Par Théorème 3.18,

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(b), \dot{\gamma}(b)) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b,0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a), \dot{\gamma}(a)) \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a,0)\right).$$

Mais puisque $\Gamma(a,s)$ et $\Gamma(b,s)$ sont constantes dans un voisinage de 0, leurs dérivées partielles par rapport à s sont nulles et par conséquent $\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = 0$.

Pour la réciproque il suffit de remarquer que si $\gamma_1 \in C^\infty([a,b], M)$ est une courbe à support compact dans $[a,b]$, alors $\Gamma_s = \gamma + s\gamma_1$ est une variation C^2 de γ telle que $\Gamma_s(a) = \gamma(a)$ et $\Gamma_s(b) = \gamma(b)$ pour s dans un voisinage proche de 0. Ainsi, par hypothèse,

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\gamma + s\gamma_1)|_{s=0} = 0$$

et donc γ est extrémale. □

3.3 Courbes extrémales sur une variété quelconque

Nous généralisons les concepts abordés dans la section précédente aux variétés quelconques. Soit pour cela M une variété différentiable que nous munissons d'un Lagrangien L de classe C^r, $r \geq 2$.

3.3.1 Définition et lien avec les minimiseurs

Nous commençons par un lemme avant de donner la définition de courbe extrémale sur une variété abstraite. Nous établissons ensuite le lien entre courbe extrémale et minimiseur.

Lemme 3.20. *Soit $\Gamma : [a,b] \times]-\epsilon, \epsilon[\longrightarrow M$ une fonction de classe C^2. Définissons la courbe $\Gamma_s : [a,b] \longrightarrow M$ pour $s \in]-\epsilon, \epsilon[$ par $\Gamma_s(t) = \Gamma(t,s)$. Alors la fonction $s \mapsto \mathbb{L}(\Gamma_s)$ est de classe C^1.*

Démonstration. Puisque $\Gamma([a,b] \times \{0\})$ est compact dans M, il existe un nombre fini de domaines de cartes locales $U_1, \dots, U_n$ tel que $\Gamma([a,b] \times \{0\})$ est contenu dans leur union. Soit $a = a_0 < \dots < a_n = b$ une partition de l'intervalle $[a,b]$ tel que chaque sous-espace $\Gamma([a_i, a_{i+1}] \times \{0\})$ soit contenu dans un certain U_i. Par compacité encore une fois, il existe $0 < \delta < \epsilon$ tel que $\Gamma([a_i, a_{i+1}] \times [-\delta, \delta])$ soit contenu dans U_i. Via la carte locale associée à U_i, nous transportons le problème dans $\mathbb{R}^n$ et alors par Lemme 3.17, la fonction $s \mapsto \int_{a_i}^{a_{i+1}} L\left(\Gamma(t,s), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s)\right) dt$ est de classe C^1 pour $s \in [-\delta, \delta]$. Mais

$$\mathbb{L}(\Gamma_s) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{a_i}^{a_{i+1}} L\left(\Gamma(t,s), \frac{\partial \Gamma}{\partial t}(t,s)\right) dt$$

et donc L est C^1 pour s dans un certain intervalle contenant 0. □

Définition 3.21. Une courbe $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ de classe C^2 pour le Lagrangien L de classe C^2 est extrémale si pour toute variation $\Gamma : [a,b]\times]-\epsilon,\epsilon[\longrightarrow M$ de γ de classe C^2 avec $\Gamma(t,s) = \gamma(t)$ dans un voisinage de $(a,0)$ et $(b,0)$, nous avons $\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = 0$.

3.22. Par Théorème 3.19, cette définition de courbe extrémale correspond bien à celle que nous avons donné dans le cas où M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 3.23. *Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe de classe C^r, $r \geq 1$ (respectivement C^1_{morc}) qui est un minimiseur pour l'ensemble $C^r([a,b],M)$ (respectivement $C^1_{morc}([a,b],M)$). Alors γ est une courbe extrémale pour L.*

Démonstration. Soit E les sous-ensemble de $C^r([a,b],M)$ (respectivement $C^1_{\text{morc}}([a,b],M)$) des courbes dont les extrémités sont celles de γ. Soit $\Gamma : [a,b]\times]-\epsilon,\epsilon[$ une variation C^r de γ avec $\Gamma(t,s) = \gamma(t)$ dans un voisinage de $(a,0)$ et $(b,0)$. Alors pour tout s dans un voisinage proche de 0, la courbe Γ_s appartient à E. Donc γ minimise l'action de Γ_s et la fonction $s \mapsto \frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)$ est C^1. Donc $\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = 0$ puisque $\Gamma_0 = \gamma$. Donc γ est extrémale. $\square$

3.3.2 Equation d'Euler-Lagrange et régularité

Nous donnons l'équivalent du théorème d'Euler-Lagrange de la section précédente pour les courbes extrémales de classe C^2 sur une variété abstraite et montrons que le résultat de régularité que nous avons obtenu pour les courbes extrémales de $\mathbb{R}^n$ reste valable sur une variété abstraite.

Lemme 3.24. *Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe extrémale de classe C^2 et $[a',b'] \subset [a,b]$. Alors la restriction $\gamma|_{[a',b']}$ est aussi une courbe extrémale de classe C^2.*

Démonstration. Soit $\Gamma : [a',b']\times]-\epsilon,\epsilon[\longrightarrow M$ une variation de classe C^2 de $\gamma|_{[a',b']}$ avec $\Gamma(t,s) = \gamma(t)$ dans un voisinage de $(a',0)$ et $(b',0)$. Alors il existe $0 < \epsilon' < \epsilon$ et $\delta > 0$ tel que $\Gamma(t,s) = \gamma(t)$ pour tout $(t,s) \in [a',a'+\delta] \cup [b'-\delta,b']\times]-\epsilon',\epsilon'[$. Prolongeons Γ en $\widetilde{\Gamma} : [a,b]\times]-\epsilon',\epsilon'[\longrightarrow M$ en posant $\widetilde{\Gamma}(t,s) = \gamma(t)$ pour tout $t \in [a,a'] \cup [b',b]$. Alors $\widetilde{\Gamma}$ est une variation de classe C^2 pour γ avec $\Gamma(t,s) = \gamma(t)$ dans un voisinage de $(a,0)$ et $(b,0)$. Ainsi, puisque γ est extrémale, $\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = 0$. Or,

$$\mathbb{L}(\widetilde{\Gamma}_s) - \mathbb{L}(\widetilde{\Gamma}_s|_{[a',b']}) = \int_a^{a'} L\left(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)\right)\,\mathrm{d}t + \int_{b'}^{b} L\left(\gamma(t),\dot{\gamma}(t)\right)\,\mathrm{d}t$$

et donc $\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\widetilde{\Gamma}_s|_{[a',b']})|_{s=0} = \frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = 0$. Ainsi, $\gamma|_{[a',b']}$ est aussi une courbe extrémale de classe C^2. $\square$

Une caractérisation des courbes extrémales sur M via l'équation d'Euler-Lagrange existe aussi et elle est donnée par le théorème suivant.

Théorème 3.25. *Soit L un Lagrangien de classe C^2 sur M et $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe extrémale de classe C^2. Alors pour tout sous-intervalle $[a',b'] \subset [a,b]$ tel que $\gamma([a',b'])$ est contenu dans un domaine de carte locale, la restriction $\gamma|_{[a',b']}$ satisfait l'équation d'Euler-Lagrange dans les coordonnées de la carte en question.*

Réciproquement, si pour tout $t_0 \in [a,b]$ nous pouvons trouver $\epsilon > 0$ et un domaine de carte U tel que $\gamma([t_0-\epsilon, t_0+\epsilon] \cap [a,b]) \subset U$ et $\gamma|_{[t_0-\epsilon,t_0+\epsilon]\cap[a,b]}$ satisfait l'équation d'Euler-Lagrange dans les coordonnées de U, alors γ est une courbe extrémale de classe C^2.

Démonstration. Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe extrémale de classe C^2 et $[a',b']$ un sous-intervalle de $[a,b]$ tel que $\gamma([a',b']) \subset U$, où U est le domaine d'une carte locale. Par le lemme précédente, la restriction $\gamma|_{[a',b']}$ est aussi extrémale de classe C^2. Via la carte locale associée à U, nous transportons la situation dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Puisque $\gamma|_{[a',b']}$ est extrémale elle satisfait nécessairement l'équation d'Euler-Lagrange.

Pour la réciproque, considérons une variation $\Gamma : [a,b]\times]-\delta,\delta[$ de classe C^2 de γ. Puisque $\gamma([a,b])$ est compact, nous pouvons trouver une partition $a = a_0 < \ldots < a_n = b$ et des domaines de cartes locales $U_1, \ldots, U_n$ tel que pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset U_i$. De plus, nous pouvons trouver $0 < \eta < \delta$ tel que $\Gamma([a_i, a_{i+1}] \times [-\eta, \eta]) \subset U$. En transportant la situation dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$, nous avons par Théorème 3.18 :

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s|_{[a_i,a_{i+1}]})|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a_{i+1}), \dot{\gamma}(a_{i+1}))\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a_{i+1}, 0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a_i), \dot{\gamma}(a_i))\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a_i, 0)\right).$$

Mais, $\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s|_{[a_i,a_{i+1}]})|_{s=0}$ et par conséquent

$$\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(b), \dot{\gamma}(b))\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(b, 0)\right) - \frac{\partial L}{\partial v}(\gamma(a), \dot{\gamma}(a))\left(\frac{\partial \Gamma}{\partial s}(a, 0)\right).$$

Mais si $\Gamma(t,s) = \gamma(t)$ dans un voisinage de $(a,0)$ et $(b,0)$, alors les dérivées partielles de Γ en $(a,0)$ et $(b,0)$ par rapport à s sont nulles et donc $\frac{d}{ds}\mathbb{L}(\Gamma_s)|_{s=0} = 0$, ce qui montre que γ est extrémale. □

3.26. Lors de la preuve de la proposition précédente, nous avons démontré que la formule de Théorème 3.18 reste valable pour les variétés quelconques.

Le résultat suivant établit la régularité des courbes extrémales de classe C^1_{morc} sur une variété abstraite.

Proposition 3.27. *Soit L un Lagrangien sur M de classe C^r avec $r \geq 2$ tel que sa transformée globale de Legendre $\mathscr{L} : TM \longrightarrow T^*M$ soit un difféomorphisme sur son image. Si $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ est une courbe extrémale de classe C^1_{morc}, alors γ est de classe C^r.*

Démonstration. Soit $\gamma : [a,b] \longrightarrow M$ une courbe extrémale de classe C^1_{morc}. Par compacité de $\gamma([a,b])$, nous pouvons trouver une partition $a = a_0 < \ldots < a_m = b$ et des domaines de cartes locales $U_1, \ldots, U_m$ tel que $\gamma([a_i, a_{i+1}]) \subset U_i$ pour tout $i = 0, \ldots, m-1$. Alors chaque restriction $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ est extrémale de classe C^1_{morc}. En se ramenant via la carte correspondante à la situation où M est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ nous pouvons appliquer Théorème 3.15 et alors $\gamma|_{[a_i,a_{i+1}]}$ est de classe C^r, ce qui fini la preuve. $\square$

Conclusion

Dans un premier temps, nous avons établi l'existence de minimiseurs de Tonelli, c'est-à-dire de solutions au problème de minimisation de l'action de courbe pour un Lagrangien L pour la classe de courbes absolument continues sur une variété M. Ce résultat d'existence était le but primaire de ce travail de semestre. Dans un second temps, nous sommes sortis de ce cadre en nous penchant sur le problème de la régularité de tels minimiseurs. Nous avons établi que sous de faibles conditions sur le Lagrangien L de classe $C^r, r \geq 2$, les courbes extrémales de classe C^1_{morc} sont de classe C^r. Or, les minimiseurs de Tonelli étant de classe C^{ac}, ces résultats de régularité ne s'appliquent à priori pas à nos solutions. Comme nous l'avons déjà annoncé dans l'introduction, cette difficulté peut être surmontée mais aurait demandé davantage de temps. Le résultat s'annonce comme suit :

Théorème. *Soit L un Lagrangien non-dégénéré sur M de classe C^r, $r \geq 2$, superlinéaire au-dessus des compacts de M et convexe dans les fibres. Si $\gamma : [a, b] \longrightarrow M$ un minimiseur de Tonelli, c'est-à-dire un minimiseur de l'action de L pour la classe des courbes absolument continues, alors γ est une courbe extrémale et donc γ est de classe C^r.*

Le lecteur intéressé peut lire la preuve complète dans [Fa08], voir Théorème 3.7.1. Il permet de joindre les parties que nous avons traité dans ce projet et donne sens au développement que nous avons fait concernant les courbes extrémales.

Références

[BG05] K. Burns, M. Gidea, *Differential geometry and topology*. Chapman and Hall/CRC, 2005.

[Ca92] M. do Carmo, *Riemannian geometry*. Birkhäuser Boston, 1992.

[Fa08] A. Fathi, *Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics*. Preliminary Version 10, 2008.

[Jo02] J. Jost, *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*. Springer, 2002.

[Le03] J. M. Lee, *Introduction to smooth manifolds*. Springer, 2003.

[Le09] J. M. Lee, *Manifolds and differential geometry*. American Mathematical Society, 2009.

[Mu00] J. R. Munkres, *Topology*. Prentice Hall, 2nd edition, 2000.

[Ru91] W. Rudin, *Functional analysis*. McGraw-Hill Inc., 1991.

[SS05] E. Stein, R. Shakarchi, *Real Analysis : Measure Theory, Integration, and Hilbert Spaces*. Princeton University Press, 2005.