УДК 513.6

ЗАРХИН Ю. Г.

О ГРУППЕ БРАУЭРА АБЕЛЕВА МНОГООБРАЗИЯ НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

§ 0. Введение

0. Пусть X — абелево многообразие над конечным полем характеристики p, $\mathrm{Br}'(X)=H^2(X_{\mathrm{et}}, G_m)$ — его (когомологическая) группа Брауэра [3]. Известно ([1], [5], [6]), что $\mathrm{Br}'(X)$ канонически изоморфна группе Брауэра $\mathrm{Br}\,(X)$.

Пусть $\mathrm{NS}(X)$ — группа Нерона — Севери, X^t — двойственное абелево многообразие к многообразию X. Если X — поверхность, то группа Брауэра конечна, и произведение ее порядка на определитель матрицы пересечений базиса группы $\mathrm{NS}(X)$ может быть вычислено с помощью дзета-функции X ([18], [19], [12]). Цель работы — доказать аналогичное утверждение для компоненты группы Брауэра $\mathrm{Br}'(X)\,(\mathrm{non}\text{-}p)$ абелева многообразия X произвольной размерности, в котором индекс пересечения заменен спариванием

$$\mathrm{NS}(X)\times NS(X^t)\to\mathbf{Z},$$

возникающим из спаривания [14]

$$\mathrm{Hom}\,(X, X^t)\times\mathrm{Hom}\,(X^t, X)\to\mathbf{Z},\quad u, v\to\mathrm{Tr}\,(uv)=\mathrm{Tr}\,(vu).$$

Близкий подход использовался в [13] при вычислении порядка группы Брауэра произведения двух кривых.

Для абелевой поверхности X определено естественное невырожденное кососимметрическое спаривание ([18], [12])

$$\mathrm{Br}'(X)\times\mathrm{Br}'(X)\to\mathbf{Q}/\mathbf{Z}.$$

Мы строим для абелева многообразия X произвольной размерности естественное невырожденное спаривание

$$\mathrm{Br}'(X)\,(\mathrm{non}\text{-}p)\times\mathrm{Br}'(X^t)\,(\mathrm{non}\text{-}p)\to\mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

которое альтернировано, если $\mathrm{Br}'(X^t)\,(\mathrm{non}\text{-}p)$ может быть отождествлено с $\mathrm{Br}'(X)\,(\mathrm{non}\text{-}p)$ с помощью изоморфизма $X\simeq X^t$, возникающего из поляризации степени 1.

Работа возникла из обдумывания вопроса Ю. И. Манина из книги [9, гл. 4, п. 9.8].

0.1. Статья состоит из трех частей. В первой части доказывается конечность компоненты группы Брауэра абелева многообразия, взаимно простой с p. Отметим, что методами работы [18] легко показать, что l-компонента группы Брауэра абелева многообразия конечна и естественным образом представляется как подгруппа кручения в коядре свободного $\mathbf{Z}_l$-модуля *. Вторая часть содержит технические результаты о кручении коядер эндоморфизмов свободных $\mathbf{Z}_l$-модулей. В третьей части работы доказывается формула для порядка группы Брауэра абелева многообразия и строится двойственность.

Оставшаяся часть введения посвящена описанию некоторых обозначений, определений и соглашений, используемых в работе.

0.2. k — конечное поле характеристики p из q элементов, $\bar{k}$ — его алгебраическое замыкание, $\Gamma = \mathrm{gal}\,(\bar{k}/k)$ — группа Галуа поля k, σ — каноническая образующая группы Γ. Для любого Γ-модуля H положим $H_\Gamma = H/(1-\sigma)H$. Если H — дискретный периодический модуль, то $H^1(\Gamma, H) = H_\Gamma$ и $H^i(\Gamma, H) = 0$ для всех $i > 1$ [16]. Если H — конечный Γ-модуль, то группа H_Γ конечна и ее порядок равен порядку группы $H^\Gamma = H^0(\Gamma, H)$.

0.2.0. Для любого гладкого проективного многообразия X над k положим $\bar{X} = X \otimes \bar{k}$. Все группы когомологий, рассматриваемые в работе, берутся относительно этальной топологии. Через G_m обозначается пучок мультипликативных групп в этальной топологии. Для любого n, взаимно простого с p, через μ_n обозначается пучок корней n-й степени из 1 в этальной топологии. Для любого простого $l \neq p$ через $\mathbf{Z}_l(1)$ обозначается l-адический пучок, отвечающий проективной системе $\{\mu_{l^m}\}$.

0.3. Под равенством двух групп мы будем подразумевать канонический изоморфизм между ними. Если B — абелева группа, то через ${}_nB$ и $B^{(n)}$ обозначаются соответственно ядро и коядро умножения на B. Положим $B_{\mathrm{tors}} = \varinjlim_n {}_nB$ — подгруппа кручения в B. Для простого l положим $B(l) = \varinjlim_m {}_{l^m}B$ — l-компонента группы B, $T_lB = \varprojlim_m {}_{l^m}B$ — l-модуль Тэйта группы B, $V_lB = T_lB \underset{\mathbf{Z}_l}{\otimes} \mathbf{Q}_l$. Отметим, что T_lB не имеет кручения. Положим

$$B_{\mathrm{div}} = \mathrm{Im}\,[\mathrm{Hom}\,(\mathbf{Q}, B) \to \mathrm{Hom}\,(\mathbf{Z}, B) = B]$$

—подгруппа делимых элементов в B, $B_{\mathrm{div}} = \bigcap\limits_n nB$. Если для всех n группа nB конечна, то $B_{\mathrm{div}} = \bigcap\limits_n nB$.

Для любой конечной группы B через $[B]$ обозначается ее порядок.

0.3.0. Пусть B — периодическая абелева группа. Тогда

$$B = \coprod_l B(l), \qquad B(l)_{\mathrm{div}} = B_{\mathrm{div}}(l), \qquad B/B_{\mathrm{div}}(l) = B(l)/B(l)_{\mathrm{div}}.$$

Для простого p положим $B\ (\text{non-}p) = \coprod\limits_{l \neq p} B(l) \subset B$.

Пусть для некоторого простого l группа ${}_lB$ конечна. Тогда $B(l)_{\mathrm{div}} = \bigcap\limits_i l^iB = (\bigcap\limits_i l^iB) \bigcap B(l) = B_{\mathrm{div}}(l)$ — минимальная подгруппа конечного индекса в $B(l)$, группа $B(l)/B(l)_{\mathrm{div}}$ конечна, T_lB — свободный $\mathbf{Z}_l$-модуль конечного ранга.

V_lB — конечномерное векторное пространство над $\mathbf{Q}_l$ ([3, гл. III, n°8]). Кроме того,

$$B(l)_{\mathrm{div}} = 0 \Leftrightarrow B(l) \text{ конечна} \Leftrightarrow T_lB = 0 \Leftrightarrow V_lB = 0.$$

Если $B(l)$ конечна, то $B(l) = B(l)/B(l)_{\mathrm{div}}$.

* См. [26].

0.4. Пусть u — эндоморфизм конечномерного векторного пространства V. Будем говорить, что u полупрост в единице, если выполнено любое из следующих эквивалентных условий.

а) Нет жордановых клеток, отвечающих собственному числу 1 эндоморфизма u пространства V, или, что то же самое, кратность 1 как обратного корня характеристического многочлена $\det(1-tu, V)$ равна $\dim V^u$.

б) $V^u \cap (1-u)V = 0$.

в) $V = V^u + (1-u)V$.

г) Найдется u-инвариантное дополнение к V^u в V.

д) Положим $V_0 = (1-u)V$. Тогда для определителя ограничения $1-u$ на V_0 выполнено следующее равенство:

$$\det(1-u, V_0) = \prod_{\beta}(1-\beta) \neq 0,$$

где β пробегает набор неединичных характеристических чисел эндоморфизма u пространства V.

е) $(1-u)V_0 = V_0$.

Если u полупрост, то он полупрост в единице.

0.5. Через $\mathbf{N}$ обозначается мультипликативная полугруппа натуральных чисел, через $\mathbf{Q}_+^*$ — мультипликативная группа положительных рациональных чисел.

0.5.0. Пусть l — простое число. Определен гомоморфизм мультипликативных полугрупп $|\ |_l \colon \mathbf{Z}_l \setminus \{0\} \to \mathbf{N}$, $|a|_l$ — число элементов фактор-кольца $\mathbf{Z}_l/a\mathbf{Z}_l$.

Если M — свободный $\mathbf{Z}_l$-модуль конечного ранга, а $u : M \to M$ — эндоморфизм M с ненулевым определителем $\det(u, M)$, то фактормодуль M/uM конечен и его порядок равен $|\det(u, M)|_l$.

Гомоморфизм $|\ |_l$ продолжается по мультипликативности до гомоморфизма групп $\mathbf{Q}_l^* \to \mathbf{Q}_+$, который мы также будем обозначать через $|\ |_l$.

0.5.1. Пусть c — ненулевое рациональное число. Тогда для всех простых l, кроме конечного числа, $c \in \mathbf{Z}_l^*$, $|c|_l = 1$ и $|c| = \prod_l |c|_l$.

Если p — простое число, то

$$c = \pm p^i \prod_{l \neq p} |c|_l$$

для некоторого целого i. В частности, если c положительно, то $c = p^i \prod_{l \neq p} |c|_l$.

0.6. Пусть H — свободный $\mathbf{Z}_l$-модуль конечного ранга, являющийся Γ-модулем, $H_{\mathbf{Q}_l} = H \otimes \mathbf{Q}_l$. Группа $H^\Gamma = H^\sigma$ — свободный чистый подмодуль в H. Положим $H_0 = H \cap (1-\sigma) H_{\mathbf{Q}_l}$. Группа H_0 — свободный чистый подмодуль в H, являющийся $\mathbf{Z}_l$-решеткой в $(1-\sigma) H_{\mathbf{Q}_l}$. Поэтому

$$\det(1-\sigma, H_0) = \det(1-\sigma, (1-\sigma) H_{\mathbf{Q}_l}).$$

Обозначим через (β) набор нееденичных характеристических чисел эндоморфизма σ пространства $H_{\mathbf{Q}_l}$.

0.6.0. Если эндоморфизм σ пространства $H_{\mathbf{Q}_l}$ полупрост в единице (п. 0.4), то (п. 0.4, а) $H_0 \cap H^\sigma = 0$ и (п. 0.4, д)

$$\det(1-\sigma, H_0) = \det(1-\sigma, (1-\sigma) H_{\mathbf{Q}_l}) = \prod_\beta (1-\beta).$$

Кроме того (п. 0.5.0), группа $H_0/(1-\sigma)H_0$ конечна и

$$[H_0/(1-\sigma)H_0] = |\det(1-\sigma, H_0)|_l = \left|\prod_\beta (1-\beta)\right|_l.$$

0.6.1. Положим $B_0(H) = (H_\Gamma)_{\mathrm{tors}} = (H/(1-\sigma)H)_{\mathrm{tors}}$. $\mathbf{Z}_l$-модуль $B_0(H)$ — конечная группа (п. 0.5.0). Легко видеть, что

$$B_0(H) = H_0/(1-\sigma)H \subset H/(1-\sigma)H = H_\Gamma.$$

0.6.2. Пусть эндоморфизм σ пространства $H_{\mathbf{Q}_l}$ полупрост в единице. В следующей диаграмме строка точна:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \to & (1-\sigma)H/(1-\sigma)H_0 & \to & H_0/(1-\sigma)H_0 & \to & H_0/(1-\sigma)H & \to 0 \\
& {\scriptstyle (1-\sigma)}\uparrow\wr & & & & \| & \\
& H/(H_0+H^\sigma) & & & & B_0(H) &
\end{array}$$

Имеем:

$$\left|\prod_\beta (1-\beta)\right|_l = [B_0(H)]\,[H/(H_0+H^\sigma)].$$

В частности, $[B_0(H)] / \left|\prod_\beta (1-\beta)\right|_l$.

0.7. Мы сохраняем обозначения п. 0.6. Цель этого раздела — дать формулу для порядка группы $B_0(H)$ в предположении, что σ полупрост в единице.

0.7.0. Пусть N — свободный $\mathbf{Z}_l$- модуль конечного ранга, являющийся Γ-модулем. Мы предполагаем, что определено совершенное спаривание

$$(\,,\,) : H \times N \to \mathbf{Z}_l,$$

т. е. отвечающие $(\,,\,)$ гомоморфизмы

$$H \to \mathrm{Hom}(N, \mathbf{Z}_l), \quad N \to \mathrm{Hom}(H, \mathbf{Z}_l)$$

суть изоморфизмы. Предполагается также, что $(\,,\,)$ Γ-инвариантно, т. е. $(\sigma x, \sigma y) = (x, y)$ $\forall x \in H$, $y \in N$. Поэтому $(\sigma x, y) = (x, \sigma^{-1} y)$, $(\sigma^{-1}x, y) = (x, \sigma y)$ $\forall x \in H$, $y \in N$.

Нам будут удобны следующие обозначения:

$$V = H_{\mathbf{Q}_l} = H \otimes \mathbf{Q}_l, \quad W = N_{\mathbf{Q}_l} = N \otimes \mathbf{Q}_l.$$

Действие группы Γ и спаривание $(\,,\,)$ продолжается по $\mathbf{Q}_l$-линейности на V и W. При этом

$$(\sigma^{-1}x, y) = (x, \sigma y), \quad (\sigma x, \sigma y) = (x, y) \quad \forall x \in V, \quad y \in W.$$

Справедливы следующие утверждения:

а) $(1-\sigma^{-1})V = (1-\sigma)V = (1-\sigma)H_{\mathbf{Q}_l}$ — ортогональное дополнение к W^σ в V относительно $(\,,\,)$.

б) $H_0=H\cap(1-\sigma)V=H\cap(1-\sigma)H_{\mathbf{Q}_l}$ — ортогональное дополнение к N^σ в H относительно $(,)$.

0.7.1. Мы предполагаем, что эндоморфизм σ пространства $V=H\otimes\mathbf{Q}_l$ полупрост в единице. Справедливы следующие утверждения.

а) Ограничение спаривания $(\,,\,)$ на $V^\sigma\times W^\sigma$ невырожденно.

б) Ограничение спаривания $(\,,\,)$ на $H^\sigma\times N^\sigma$ невырожденно.

в) Эндоморфизм σ пространства $W=N\otimes\mathbf{Q}_l$ полупрост в единице.

Каждое из условий а) — в) эквивалентно условию полупростоты эндоморфизма σ пространства V в единице.

0.7.2. Выберем базисы $\{f_i\}$ в H^σ, $\{g_i\}$ в N^σ и обозначим через Δ натуральное число $|\det(f_i, g_j)|_l$, получающееся применением гомоморфизма $|\ |_l$ к определителю матрицы билинейной формы, отвечающей $(,)$. Число Δ не зависит от выбора базисов и может быть проинтерпретировано следующим образом. Положим

$$L=\{x\in V^\sigma|\,(x, y)\in\mathbf{Z}_l\ \ \forall y\in N^\sigma\}.$$

Тогда $H^\sigma\subset L$ и $[L/H^\sigma]=\Delta$.

0.7.3. ОСНОВНАЯ ЛЕММА. $\left|\prod\limits_\beta(1-\beta)\right|_l=[B_0(H)]\,\Delta.$

0.7.4. Доказательство. Согласно п. 0.6.2 нам достаточно установить, что $[H/(H_0+H^\sigma)]=\Delta$. Мы докажем это равенство, если построим изоморфизм $H/H_0\simeq L$, тождественный на H^σ (п. 0.7.2). Этим мы сейчас и займемся.

0.7.5. Пусть $\mathrm{pr}: V\to V^\sigma$ — проектор с ядром $(1-\sigma)V$. Положим $H'=\mathrm{pr}\,H$. $H^\sigma\subset H'=\{H+(1-\sigma)V\}\cap V^\sigma$. Гомоморфизм pr определяет изоморфизм $H/H_0\simeq H'$, тождественный на H^σ. Поэтому для доказательства основной леммы нам достаточно установить следующий факт.

0.7.6. Предложение. $H'=L=\{x\in V^\sigma|\,(x, y)\in\mathbf{Z}_l\ \ \forall y\in N^\sigma\}$.

0.7.7. Доказательство. Так как N^σ — чистый подмодуль в N, то любой гомоморфизм φ: $N^\sigma\to\mathbf{Z}_l$ продолжается до гомоморфизма $\tilde\varphi$: $N\to\mathbf{Z}_l$ и, значит, задается некоторым x из H с помощью $(\,,\,)\cdot$(п. 0.7.0). С другой стороны, ортогональное дополнение к N^σ в V относительно $(\,,\,)$ совпадает с $(1-\sigma)V$ (п. 0.7.0), а). Поэтому

$$\{x\in V|\,(x, y)\in\mathbf{Z}_l\ \ \forall y\in N^\sigma\}=H+(1-\sigma)V,$$

$$L=\{x\in V^\sigma|\,(x, y)\in\mathbf{Z}_l\ \forall y\in N^\sigma\}=\{H+(1-\sigma)V\}\cap V^\sigma=H'.$$

0.7.8. Пусть H_0^-, N_0^- — свободные $\mathbf{Z}$-модули конечного ранга и определены изоморфизмы

$$H_0^-\otimes\mathbf{Z}_l\simeq H^\sigma,\qquad N_0^-\otimes\mathbf{Z}_l\simeq N^\sigma.$$

Предположим, что задано спаривание

$$e_0: H_0^-\times N_0^-\to\mathbf{Z}.$$

Пусть спаривание $(\,,\,)$ индуцирует на $H_0^-\times N_0^-$ спаривание, совпадающее с e_0. Тогда спаривание e_0 невырожденно.

Выберем базисы в H_0 и N_0 и обозначим через Δ_0 модуль определителя матрицы билинейной формы, отвечающий e_0. Натуральное число Δ_0

не зависит от выбора базисов и называется модулем определителя спаривания e_0. Легко видеть, что $\Delta = |\Delta_0|_l$.

0.7.9. Следствие. $\left|\prod\limits_{\beta}(1-\beta)\right|_l = [B_0(H)]\,|\Delta_0|_l$, *где* β *пробегает набор неединичных характеристических чисел эндоморфизма* σ *пространства* $H\otimes\mathbf{Q}_l$.

0.7.10. Замечание. Справедлив $\mathbf{Z}$-вариант основной леммы. Он дает ответ на вопрос Ю. И. Манина ([9, гл. 4, п. 9.8]).

ЧАСТЬ I. КОНЕЧНОСТЬ ГРУППЫ БРАУЭРА

§ 1. Когомологии многообразий над конечным полем

1. Цель этого параграфа — напомнить нужные нам сведения о когомологиях пучков G_m, μ_n и $\mathbf{Z}_l(1)$ для многообразий над конечными полями.

1.0. Пусть X — гладкое проективное абсолютно неприводимое многообразие над конечным полем k. Известно [11], что $\operatorname{Pic} X = H^1(X, G_m)$, $\operatorname{Pic}\overline{X} = H^1(\overline{X}, G_m)$, где $\operatorname{Pic} X$ и $\operatorname{Pic}\overline{X}$ — группы классов изоморфных обратимых пучков на X и $\overline{X}$. Когомологической группой Брауэра $\mathrm{Br}'(X)$ называется группа $H^2(X, G_m)$ (см. [3]). Группа $\mathrm{Br}'(X)$ — периодическая, и гипотеза М. Артина утверждает, что $\mathrm{Br}'(X)$ конечна [3]. Для поверхностей гипотеза Артина — Тэйта [18] дает формулу для порядка $\mathrm{Br}'(X)$.

Предполагается [3], что $\mathrm{Br}'(X)$ канонически изоморфна группе Брауэра $\mathrm{Br}\,(X)$ (см. обсуждение в [11, гл. 4]).

1.1. Спектральная последовательность Лерэ относительно структурного морфизма для пучка G_m дает нам точную последовательность (см., например, [2, гл. 4, § 4]):

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to H^1(\Gamma, H^0(\overline{X}, G_m)) & \to & H^1(X, G_m) & \to & H^1(\overline{X}, G_m)^{\Gamma} & \to & H^2(\Gamma, H^0(\overline{X}, G_m)) \\
\| & & \| & & \| & & \| \\
H^1(\Gamma, \overline{k}^*) = 0 & & \operatorname{Pic} X & & \operatorname{Pic}\overline{X}^{\Gamma} & & H^2(\Gamma, \overline{k}^*) = \mathrm{Br}\, k = 0
\end{array}$$

Поэтому $\operatorname{Pic} X = \operatorname{Pic}\overline{X}^{\Gamma}$.

1.1.0. Обозначим через $\operatorname{Pic}^0\overline{X}$ подгруппу в $\operatorname{Pic}\overline{X}$, состоящую из обратимых пучков, алгебраически эквивалентных нулю. Через X^t обозначается абелево многообразие над k, двойственное к многообразию Альбанезе X. Γ-модули $X^t(\overline{k})$ и $\operatorname{Pic}^0\overline{X}$ изоморфны ([10, лемма 4]). Поэтому группа $\operatorname{Pic}\overline{X}^{\Gamma}$ конечна, $\operatorname{Pic}^0\overline{X} \subset \operatorname{Pic} X_{\mathrm{tors}} \cap \operatorname{Pic} X_{\mathrm{div}}$ и $H^1(\Gamma, \operatorname{Pic}^0\overline{X}) = H^1(\Gamma, X^t(\overline{k})) = 0$ (теорема Ленга [8]). Положим $\mathrm{NS}\,(\overline{X}) = \operatorname{Pic}\overline{X}/\operatorname{Pic}^0\overline{X}$. Группа Нерона — Севери $\mathrm{NS}\,(\overline{X})$ конечно порождена (теорема Нерона — Севери). Поэтому $\operatorname{Pic}^0\overline{X} = \operatorname{Pic}^0 X_{\mathrm{div}}$. Обозначим через $\mathrm{NS}\,(X)$ образ $\operatorname{Pic} X$ в $\mathrm{NS}\,(\overline{X})$. Имеет место следующая точная последовательность:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to \operatorname{Pic}^0\overline{X}^{\Gamma} & \to & \operatorname{Pic}\overline{X}^{\Gamma} & \to & \mathrm{NS}\,(\overline{X})^{\Gamma} & \to & H^1(\Gamma, \operatorname{Pic}^0\overline{X}) \\
& & \| & & & & \| \\
& & \operatorname{Pic} X & & & & 0
\end{array}$$

Поэтому $\mathrm{NS}\,(\overline{X})^{\Gamma} = \mathrm{NS}\,(X)$, группа $\operatorname{Pic} X$ конечно порождена и ее ранг равен рангу группы $\mathrm{NS}\,(X)$. Обозначим ранг группы $\mathrm{NS}\,(X)$ и $\operatorname{Pic} X$

через $\rho(X)$. Отметим, что естественные гомоморфизмы

$$\operatorname{Pic} X \otimes \mathbf{Q}_l \to \operatorname{NS}(X) \otimes \mathbf{Q}_l, \qquad \operatorname{Pic} \overline{X}/n \operatorname{Pic} X \to \operatorname{NS}(\overline{X})/n \operatorname{NS}(\overline{X})$$

— изоморфизмы. Из конечнопорожденности NS $(\overline{X})$ вытекает, что образ Γ в Aut NS $(\overline{X})$ — конечная циклическая группа.

1.2. Для любого n, взаимно простого с p, определена точная последовательность Куммера [3]

$$0 \to \mu_n \to G_m \to G_m \to 0$$

пучков на X_{et} и $\overline{X}_{\mathrm{et}}$. Отвечающие ей когомологические последовательности дают нам точные последовательности:

$$0 \to \operatorname{Pic} X/n \operatorname{Pic} X \to H^2(X, \mu_n) \to {}_n\mathrm{Br}'(X) \to 0,$$
$$0 \to H^1(\overline{X}, \mu_n) \to {}_n\operatorname{Pic} \overline{X} \to 0,$$
$$0 \to \operatorname{Pic} \overline{X}/n \operatorname{Pic} \overline{X} \,(= \operatorname{NS}(\overline{X})/n \operatorname{NS}(\overline{X})) \to H^2(\overline{X}, \mu_n).$$

1.2.0. Предложение. *Группа* ${}_n\mathrm{Br}'(X)$ *конечна.*

1.2.1. Для доказательства конечности группы ${}_n\mathrm{Br}'(X)$ достаточно установить конечность группы $H^2(X, \mu_n)$ (см. п. 1.2). Для этого нам понадобится спектральная последовательность Хохшильда — Серра (см. [11, гл. III, § 2]) для μ_n.

1.2.2. Известно ([21, éxpose XIV, следствие 1.2]), что все группы $H^i(\overline{X}, \mu_n)$ конечны и снабжены действием группы Γ [11]. Спектральная последовательность Хохшильда — Серра для пучка μ_n относительно морфизма $\overline{X} \to X$ распадается на точные последовательности (см. п. 0.2)

$$0 \to H^{i-1}(\overline{X}, \mu_n)_\Gamma \to H^i(X, \mu_n) \to H^i(\overline{X}, \mu_n)^\Gamma \to 0.$$

Следовательно, все группы $H^i(X, \mu_n)$ конечны. В частности, конечна группа $H^2(X, \mu_n)$, а вместе с ней и группа ${}_n\mathrm{Br}'(X)$.

1.2.3. Определена следующая коммутативная точная диаграмма (см. [18], [12]):

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \operatorname{Pic} X/n \operatorname{Pic} X \arrow[r] \arrow[d] & {[\operatorname{NS}(\overline{X})/n \operatorname{NS}(\overline{X})]^\Gamma} \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^1(\overline{X}, \mu_n)_\Gamma \arrow[r] \arrow[d] & H^2(X, \mu_n) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\overline{X}, \mu_n)^\Gamma \arrow[r] & 0 \\
 & ({}_n\operatorname{Pic} \overline{X})_\Gamma \arrow[d] & {}_n\mathrm{Br}'(X) \arrow[d] & \\
 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Строка в диаграмме возникла из спектральной последовательности Хохшильда — Серра для $i=2$, а столбцы возникли из точной последовательности Куммера (п. 1.2). Все группы в диаграмме конечны.

Обозначим через $t(X)$ порядок конечной группы $\operatorname{Pic} X_{\mathrm{tors}} = \operatorname{Pic} \overline{X}^\Gamma_{\mathrm{tors}}$ (п. 1.1). Порядок группы $({}_n\operatorname{Pic} \overline{X})_\Gamma$ равен порядку группы ${}_n\operatorname{Pic} \overline{X}^\Gamma$ (см. п. 0.2). Поэтому группа $H^1(\overline{X}, \mu_n)_\Gamma$ аннулируется умножением на $t(X)$.

1.3. Пусть l — простое число $\neq p$. Полагая $n = l^m$ в утверждениях п. 1.2 и переходя к проективному пределу (по m), мы сможем получить информацию о l-компоненте группы Брауэра.

По определению ([11, гл. V, § 1])

$$H^i(X, \mathbf{Z}_l(1)) = \varprojlim_m H^i(X, \mu_{l^m}), \quad H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) = \varprojlim_m H^i(\overline{X}, \mu_{l^m}).$$

Из конечности групп $H^i(X, \mu_{l^m})$, $H^i(\overline{X}, \mu_{l^m})$ (п. 1.2.2) вытекает, что $H^i(X, \mathbf{Z}_l(1))$, $H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))$ — конечнопорожденные $\mathbf{Z}_l$-модули (см. [11, гл. V, § 1, лемма 1.11]). Группы $H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))$ снабжены непрерывным действием группы Г. Полагая в спектральной последовательности Хохшильда — Серра (п. 1.2.2) $n=l^m$ и переходя к проективному пределу, получаем точную последовательность

$$0 \to H^{i-1}(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))_\Gamma \to H^i(X, \mathbf{Z}_l(1)) \to H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))^\Gamma \to 0.$$

1.3.0. Полагая $n=l^m$ в диаграмме п. 1.2.3 и переходя к проективному пределу, получаем коммутативную точную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & \varprojlim\limits_m H^1(\overline{X}, \mu_{l^m})_\Gamma \arrow[d, equal] & \operatorname{Pic} X \otimes \mathbf{Z}_l \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbf{Z}_l \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & H^1(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))_\Gamma \arrow[r] & H^2(X, \mathbf{Z}_l(1)) \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))^\Gamma \arrow[r] & 0 \\
 & & T_l \operatorname{Br}'(X) \arrow[d] & & \\
 & & 0 & &
\end{tikzcd}$$

Легко видеть (см. конец п. 1.2.3), что группа $H^1(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))_\Gamma$ аннулируется умножением на $t(X)$. Умножая диаграмму тензорно на $\mathbf{Q}_l$, получаем коммутативную точную диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
 & \operatorname{Pic} X \otimes \mathbf{Q}_l \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{NS}(X) \otimes \mathbf{Q}_l \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & H^2(X, \mathbf{Z}_l(1)) \otimes \mathbf{Q}_l \arrow[r] \arrow[d] & H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))^\Gamma \otimes \mathbf{Q}_l \arrow[d, equal] \\
 & V_l \operatorname{Br}'(X) \arrow[d] & \left([H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) \otimes \mathbf{Q}_l]^\Gamma\right) \\
 & 0 &
\end{tikzcd}$$

Из нее вытекает следующий «хорошо известный» результат (ср. [18], [12]) (см. пп. 0.3.0, 1.2.0).

1.3.1. ТЕОРЕМА. *Следующие условия эквивалентны*:

а) *Группа* $\operatorname{Br}'(X)(l)$ *конечна.*

б) $\operatorname{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}=0$, $\operatorname{Br}'(X)(l)=\operatorname{Br}'(X)(l)/\operatorname{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}$.

в) $V_l \operatorname{Br}'(X)=0$.

г) $\mathrm{NS}(X)\otimes\mathbf{Q}_l=[H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)\otimes\mathbf{Q}_l]^\Gamma=[H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l]^\sigma$, *где* σ — *каноническая образующая группы* Г (п. 0.2).

д) $\dim[H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l]^\sigma=\dim[H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l]^\Gamma=\rho(X)$.

1.3.2. Замечание. Из последней диаграммы п. 1.3.0 вытекает, что

$$\dim[H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l]^\sigma \geqslant \rho(X).$$

1.3.3. Следствие. *Пусть X — произведение кривых и абелевых многообразий. Тогда группа* $\mathrm{Br}'(X)(l)$ *конечна*, $\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}=0$ *и* $\mathrm{Br}'(X)(l)=\mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}$.

1.3.4. Доказательство. Если X — произведение кривых и абелевых многообразий, то

$$\mathrm{NS}\,(X)\otimes\mathbf{Q}_l=[H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l]^{\Gamma}$$

(см. [19, теорема 4, § 3]). Остается применить теорему 1.3.1.

1.4. Посмотрим, что дает при переходе к проективному пределу теория Куммера (п. 1.2). Мы не будем приводить доказательства, а сошлемся на результаты работы [3].

1.4.0. Определено естественное вложение ([3], [17])

$$\mathrm{NS}\,(\overline{X})\otimes\mathbf{Z}_l\hookrightarrow H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1)),$$

индуцирующее изоморфизм на подгруппах кручения ([3, III, п. 8.2]). Поэтому для всех простых l, кроме конечного числа, $H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))$ — свободный $\mathbf{Z}_l$-модуль.

1.4.1. Определен естественный изоморфизм ([3, III, формула 8.9])

$$\mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}=[\mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}'(X)_{\mathrm{div}}](l)=H^3(X,\mathbf{Z}_l(1))_{\mathrm{tors}}.$$

Положим

$$\mathrm{Br}_0(X,l)=(H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))_{\Gamma})_{\mathrm{tors}}=(H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))/(1-\sigma)\,H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))_{\mathrm{tors}}.$$

Если $H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))$ — свободный $\mathbf{Z}_l$-модуль, то (п. 0.6.1)

$$\mathrm{Br}_0(X,l)=B_0(H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))).$$

1.4.2. Предложение. *Определена каноническая точная последовательность*

$$0\to\mathrm{Br}_0(X,l)\to\mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}\to H^3(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}.$$

В частности, если $H^3(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))_{\mathrm{tors}}=0$, *то определен естественный изоморфизм* $\mathrm{Br}_0(X,l)=\mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}$.

1.4.3. Доказательство. Спектральная последовательность Хохшильда — Серра (п. 1.3) дает нам точную последовательность для $i=3$:

$$0\to H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))_{\Gamma}\to H^3(X,\mathbf{Z}_l(1))\to H^3(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))^{\Gamma}\to 0.$$

Переходя к подгруппам кручения, получаем точную последовательность

$$\begin{array}{ccccc}0\to(H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))_{\Gamma})_{\mathrm{tors}} & \to & H^3(X,\mathbf{Z}_l(1)) & \to & H^3(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}\\ \| & & \| & & \\ \mathrm{Br}_0(X,l) & & \mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}} & & \end{array}$$

Тем самым определена точная последовательность

$$0\to\mathrm{Br}_0(X,l)\to\mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}\to H^3(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))^{\Gamma}_{\mathrm{tors}}.$$

1.4.4. Следствие. *Пусть X — произведение кривых и абелевых многообразий. Тогда* $\mathrm{Br}'(X)(l)=\mathrm{Br}_0(X,l)=B_0(H^2(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1)))$.

1.4.5. Доказательство. Хорошо известно, что если X — произведение кривых и абелевых многообразий, то для всех i $H^i(\overline{X},\mathbf{Z}_l(1))_{\mathrm{tors}}=$

$=0$. Применяя результаты пп. 1.4.1, 1.4.2, 1.3.3, получаем:

$$B_0(H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) = \mathrm{Br}_0(X, l) = \mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Br}'(X)(l).$$

1.4.6. В следующем параграфе мы сравним когомологии $\mathbf{Z}_l(1)$ с когомологиями постоянного пучка $\mathbf{Z}_l$ и опишем связь между конечностью группы Брауэра и порядком полюса дзета-функции X в единице.

§ 2. Гипотеза Тэйта

2.0. Все обозначения и соглашения предыдущих параграфов остаются в силе. Напомним, что q — число элементов поля k.

Обозначим $F: X \to X$ — морфизм Фробениуса, т. е. отображение, тождественно действующее на точках и индуцирующее гомоморфизм $f \to f^q$ структурного пучка.

2.1. Для каждого простого $l \neq p$ определены группы этальных когомологий $H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))$, являющиеся конечнопорожденными $\mathbf{Z}_l$-модулями [11]. $\mathbf{Z}_l$-модули $H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))$ и $H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l)$ изоморфны (неканонически). Группы $H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l)$ снабжены непрерывным действием группы Γ. Обозначим через $M_l = T_l\overline{k}^*$ свободный $\mathbf{Z}_l$-модуль ранга 1, снабженный непрерывным действием группы Γ, при котором

$$\sigma x = qx \quad \forall x \in M_l.$$

Тогда определены естественные изоморфизмы Γ-модулей [4]

$$H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) = H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l) \underset{\mathbf{Z}_l}{\otimes} M_l.$$

2.1.0. Морфизм Фробениуса F также действует на $H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l)$. Полином

$$\mathcal{P}_2(X, t) = \det(1 - tF, H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) = \det(1 - t\sigma^{-1}, H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l) \underset{\mathbf{Z}_l}{\otimes} \mathbf{Q}_l)$$

лежит в $1 + t\mathbf{Z}[t]$ и не зависит от l. Все (комплексные) обратные корни полинома $\mathcal{P}_2(X, t)$ по модулю равны q [4].

2.1.4. Разложим полином $\mathcal{P}_2(X, t)$ на линейные множители в $\overline{\mathbf{Q}}[t]$:

$$\mathcal{P}_2(X, t) = \prod_{j=1}^{b_2} (1 - \alpha_{2,j}t).$$

Тогда полином

$$\widetilde{\mathcal{P}}_2(X, t) = \det(1 - t\sigma, H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) \otimes_{\mathbf{Z}_l} \mathbf{Q}_l) = \prod_{j=1}^{b_2} [1 - (q/\alpha_{2,j})\, t]$$

лежит в $1 + t\mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right][t]$ и не зависит от l. Все обратные (комплексные) корни полинома $\widetilde{\mathcal{P}}_2(X, t)$, или, что то же самое, характеристические числа эндоморфизма σ пространства $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) \otimes \mathbf{Q}_l$ по модулю равны 1. Кратность числа q как обратного корня полинома $\mathcal{P}_2(X, t)$ равна кратности числа 1 как обратного корня полинома $\widetilde{\mathcal{P}}_2(X, t)$.

2.1.2. Дж. Тэйт [17] сформулировал следующую гипотезу.

(T) : $\rho(X)$ равно кратности q как обратного корня $\mathscr{P}_2(X, t)$. Мы видим (п. 2.1.1), что гипотеза Тэйта эквивалентна следующему утверждению.

($\tilde{\mathrm{T}}$) : Кратность 1 как обратного корня $\widetilde{\mathscr{P}}_2(X, t)$ равна $\rho(X)$.

Положим

$$c_2(X) = \prod_{\alpha_{2,j}\neq q} (1 - \alpha_{2,j}/q).$$

Легко видеть, что $c_2(X)$ — положительное рациональное число, лежащее в $\mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$. Заметим, что $c_2(X) = \prod\limits_{\beta}(1-\beta)$, где β пробегает набор неединичных характеристических чисел эндоморфизма σ пространства $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l$.

Если для X справедлива гипотеза (T), то

$$\mathscr{P}_2(X, q^{-s}) \sim c_2(X)\,(1-q^{1-s})^{\rho(X)} \text{ при } s\to 1.$$

2.1.3. Напомним, что $\dim\,[H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l]^{\sigma}\geqslant\rho(X)$ (п. 1.3.2). Поэтому если для X выполнена гипотеза (T), то

$$\rho(X) = \dim\,[H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l]^{\sigma}$$

и эндоморфизм σ пространства $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l$ полупрост в единице (п. 0.4), т. е. у σ нет жордановых клеток, отвечающих собственному числу 1.

Применяя теорему 1.3.1, получаем следующий «хорошо известный» результат ([18], [12]).

2.1.4. ТЕОРЕМА. *Пусть для X выполнена гипотеза* (T). *Тогда для всех простых $l\neq p$ группа* $\mathrm{Br}'(X)(l)$ *конечна и*

$$\mathrm{Br}'(X)(l) = \mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}.$$

2.1.5. Замечание. Если X — произведение кривых и абелевых многообразий, то для X выполнена гипотеза (T) (см. [19, § 3, теорема 4]).

2.2. Цель этого раздела — показать, как работает условие «полупростоты в единице».

Напомним, что для любого простого l определен гомоморфизм $|\ \ |_l : \mathbf{Q}_l^*\to\mathbf{Q}_+^*$, удовлетворяющий следующим условиям (см. п. 0.5):

а) Если $u: M\to M$ — эндоморфизм свободного $\mathbf{Z}_l$-модуля M с ненулевым определителем $\det(u, M)$, то порядок фактор-модуля M/uM равен $|\det(u, M)|$.

б) Если $c\in\mathbf{Z}_l\setminus\{0\}$, то $|c|_l\in\mathbf{N}$.

в) Если $c\in\mathbf{Q}^*$, то для всех простых l, кроме конечного числа, $c\in\mathbf{Z}_l^*$ и $|c|_l=1$.

2.2.0. Так как $c_2(X)\in\mathbf{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ (п. 2.1.2), то для всех простых $l\neq p$ $c_2(X)\in\mathbf{Z}_l$ и $|c_2(X)|_l\in\mathbf{N}$.

Для всех простых l, кроме конечного числа,

$$|c_2(X)|_l = 1.$$

2.2.1. ТЕОРЕМА. *Пусть для некоторого простого $l\neq p$ выполнены следующие условия*:

1) $\mathbf{Z}_l$*-модуль* $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))$ *свободен.*

2) *Эндоморфизм* σ *пространства* $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l$ *полупрост в единице.*

Тогда порядок группы $\mathrm{Br}_0(X, l)$ *делит* $|c_2(X)|_l$.

2.3. Доказательство. В предположениях теоремы $\mathrm{Br}_0(X, l) = B_0(H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))$ (пп. 1.4.1, 0.6.1). Тогда (п. 0.6.2) порядок $\mathrm{Br}_0(X, l)$ делит $|\prod_\beta(1-\beta)|_l$, где β пробегает набор неединичных характеристических чисел эндоморфизма σ пространства $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l$. Остается напомнить, что $c_2(X) = \prod_\beta(1-\beta)$ (п. 2.1.2).

2.3.1. Следствие. *Пусть для всех простых* l, *кроме конечного числа, эндоморфизм* σ *пространства* $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l$ *полупрост в единице. Тогда для всех простых* l, *кроме конечного числа,* $\mathrm{Br}_0(X, l) = 0$.

2.3.2. Доказательство. Для всех простых l, кроме конечного числа, $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))$ — свободный $\mathbf{Z}_l$-модуль (п. 1.4.0), эндоморфизм σ пространства $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l$ полупрост в единице и $|c_2(X)|_l = 1$ (п. 2.2.0). Поэтому, согласно теореме 2.2.1, для всех простых l, кроме конечного числа, порядок группы $\mathrm{Br}_0(X, l)$ делит 1, т. е. $\mathrm{Br}_0(X, l) = 0$.

2.3.3. Следствие. *Пусть для* X *выполнена гипотеза* (T). *Тогда для всех простых* l, *кроме конечного числа,* $\mathrm{Br}_0(X, l) = 0$.

2.3.4. Доказательство. В самом деле, для всех $l\neq p$ эндоморфизм σ пространства $H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))\otimes\mathbf{Q}_l$ полупрост в единице (п. 2.1.3). Остается применить следствие 2.3.1.

2.3.5. Следствие. *Пусть* X — *произведение кривых и абелевых многообразий. Тогда группа* $\mathrm{Br}'(X)(\text{non-}p) = \coprod_{l\neq p}\mathrm{Br}'(X)(l)$ *конечна.*

2.3.6. Доказательство. Достаточно вспомнить, что $\mathrm{Br}'(X)(l) = \mathrm{Br}_0(X)(l) = B_0(H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))$ (п. 1.4.4) и применить следствие 2.3.5.

2.3.6.0. Следствие. *Пусть* X — *абелево многообразие. Тогда группа* $\mathrm{Br}'(X)(\text{non-}p)$ *конечна и для всех простых* $l\neq p$ $\mathrm{Br}'(X)(l) = \mathrm{Br}_0(X, l) = B_0(H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))$.

2.3.7. Следствие. *Пусть для всех простых* l, *кроме конечного числа,* $H^3(\overline{X}, Z_l(1))_{\mathrm{tors}} = 0$. *Тогда если для* X *справедлива гипотеза* (T), *то для всех простых* l, *кроме конечного числа, группа* $\mathrm{Br}'(X)(l) = 0$ *и группа* $\mathrm{Br}'(X)(\text{non-}p) = \coprod_{l\neq p}\mathrm{Br}'(X)(l)$ *конечна.*

2.3.8. Доказательство. Согласно п. 1.4.2 для всех простых l, кроме конечного числа, $\mathrm{Br}_0(X, l) = \mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}$.

Согласно п. 2.1.4 для всех простых $l\neq p$ группа $\mathrm{Br}'(X)(l)$ конечна и $\mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}} = \mathrm{Br}'(X)(l)$. Тем самым для всех простых l, кроме конечного числа, $\mathrm{Br}'(X)(l) = \mathrm{Br}_0(X, l)$. Поэтому нам достаточно проверить, что для всех простых l, кроме конечного числа, $\mathrm{Br}_0(X, l) = 0$. Но это немедленно следует из утверждения п. 2.3.3.

2.3.9. Следствие. *Пусть* $\overline{X}$ *поднимается в характеристику* 0. *Тогда если для* X *выполнена гипотеза* (T), *то группа* $\mathrm{Br}'(X)(\text{non-}p)$ *конечна.*

2.3.10. Доказательство. Из теоремы сравнения ([11, гл. III, § 3]) и формулы универсальных коэффициентов вытекает, что для всех простых l, кроме конечного числа,

$$H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))_{\text{tors}} = H^i(\overline{X}, \mathbf{Z}_l)_{\text{tors}} = 0.$$

В частности, для всех простых l, кроме конечного числа,

$$H^3(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))_{\text{tors}} = 0.$$

Остается применить следствие 2.3.7.

2.3.11. Замечание. Из недавних результатов О. Габбера вытекает, что для любого X выполнено следующее условие.

Для всех простых l, кроме конечного числа,

$$H^3(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))_{\text{tors}} = 0.$$

Поэтому для любого X из справедливости гипотезы (T) вытекает конечность группы $\mathrm{Br}'(X)$ (non-p).

2.3.12. Замечание. Для поверхностей эквивалентность гипотезы (T) и конечности группы Брауэра доказана в [18], [12].

2.3.13. Следствие. *Пусть X — поверхность типа $K3$ и $p \neq 2$. Тогда группа* $\mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}'(X)_{\mathrm{div}}$ *конечна.*

2.3.14. Доказательство. Имеем:

$$\mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}'(X)_{\mathrm{div}} = \left(\coprod_{l \neq p} \mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}\right) \oplus \mathrm{Br}'(X)(p)/\mathrm{Br}'(X)(p)_{\mathrm{div}}.$$

Для поверхностей группа $\mathrm{Br}'(X)(p)/\mathrm{Br}'(X)(p)_{\mathrm{div}}$ конечна (см. [12]). Поэтому достаточно убедиться в том, что для всех простых l, кроме конечного числа, $\mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}} = 0$.

Поверхность X типа $K3$ поднимается в характеристику 0 ([23, § 2]). Для всех $l \neq p$ $H^3(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))_{\text{tors}} = 0$. Поэтому (п. 1.4.2) $\mathrm{Br}_0(X, l) = \mathrm{Br}'(X)(l)/\mathrm{Br}'(X)(l)_{\mathrm{div}}$ и нам достаточно доказать, что для всех простых l, кроме конечного числа, $\mathrm{Br}_0(X, l) = 0$. Но для поднимаемых в характеристику 0 поверхностей X типа $K3$ эндоморфизм σ пространства $H^2(\overline{X}, \mathrm{Z}_l(1)) \otimes \mathbf{Q}_l$ полупрост ([22, лемма 5.7]). Поэтому (п. 2.3.1) для всех простых l, кроме конечного числа, $\mathrm{Br}_0(X, l) = 0$.

2.3.15. Замечание. Для поверхностей типа $K3$ с пучком эллиптических кривых и для куммеровых поверхностей доказана справедливость гипотезы Тэйта и, следовательно, группа Брауэра конечна ([22], [12]).

2.3.16. Замечание. Пусть X, Y — гладкие проективные многообразия над k такие, что группы $(\mathrm{Br}'(X)/\mathrm{Br}'(X)_{\mathrm{div}})$ (non-p), $(\mathrm{Br}'(Y)/\mathrm{Br}'(Y)_{\mathrm{div}})$ (non-p) конечны. Тогда из формулы Кюннета и полупростоты одномерных когомологий [19] вытекает конечность группы $(\mathrm{Br}'(X \times Y)/\mathrm{Br}'(X \times Y)_{\mathrm{div}})$ (non-p).

ЧАСТЬ II. ДВОЙСТВЕННОСТЬ

§ 3. Группы B_0 и B^0

3. Мы придерживаемся обозначений пп. 0.6, 0.7.

H, N — свободные $\mathbf{Z}_l$-модули конечного ранга, являющиеся Γ-модулями, $(\,,)\colon H \times N \to \mathbf{Z}_l$ — совершенное Γ-инвариантное спаривание, $V=$

$=H\otimes\mathbf{Q}_l$, $W=N\otimes\mathbf{Q}_l$,

$$H_0=H\cap(1-\sigma)V, \quad N_0=N\cap(1-\sigma)W,$$

$$B_0(H)=H_0/(1-\sigma)H=(H/(1-\sigma)H)_{\mathrm{tors}}, \quad B_0(N)=N_0/(1-\sigma)N= \\ =(N/(1-\sigma)N)_{\mathrm{tors}}.$$

Положим

$$B^0(H)=(V/H)^\sigma/((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}}, \quad B^0(N)=(W/N)^\sigma/((W/N)^\sigma)_{\mathrm{div}}.$$

Справедлив следующий простой, но полезный факт (ср. [20, предложение 2.3]).

3.0. ЛЕММА. *Определены канонические изоморфизмы конечных групп* $\delta: B^0(H)\xrightarrow{\sim}B_0(H)$, $\delta: B^0(N)\xrightarrow{\sim}B_0(N)$, *индуцированные «граничными» гомоморфизмами*:

$$\tilde\delta:(V/H)^\sigma\to H/(1-\sigma)H, \quad \underset{\substack{x\in V,\\ x-\sigma x\in H}}{x \bmod H}\to(x-\sigma x)\bmod(1-\sigma)H,$$

$$\tilde\delta:(W/N)^\sigma\to N/(1-\sigma)N, \quad \underset{\substack{y\in W,\\ y-\sigma y\in N}}{y \bmod N}\to(y-\sigma y)\bmod(1-\sigma)N.$$

3.0.1. Доказательство. Короткая точная последовательность Г-модулей $0\to H\to V\to V/H\to 0$ индуцирует точную «когомологическую» последовательность

$$0\to H^\sigma\to V^\sigma\to(V/H)^\sigma\xrightarrow{\tilde\delta}H/(1-\sigma)H\to V/(1-\sigma)V.$$

Группа $(V/H)^\sigma$ — периодическая, поэтому $\operatorname{Im}\tilde\delta\subset(H/(1-\sigma)H)_{\mathrm{tors}}$. $V/(1-\sigma)V$ — векторное пространство над $\mathbf{Q}_l$, поэтому $(H/(1-\sigma)H)_{\mathrm{tors}}$ переходит в 0 и $\operatorname{Im}\tilde\delta=(H/(1-\sigma)H)_{\mathrm{tors}}$ в силу точности когомологической последовательности. $\operatorname{Ker}\tilde\delta=V^\sigma/H^\sigma\subset((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}}$. Я утверждаю, что $\operatorname{Ker}\tilde\delta=((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}}$. В самом деле, $(H/(1-\sigma)H)_{\mathrm{tors}}$ — конечная группа (п. 0.6.1), поэтому $((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}}\subset\operatorname{Ker}\tilde\delta$. Мы видим, что

$$((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}}\supset V^\sigma/H^\sigma=\operatorname{Ker}\tilde\delta\supset((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}}.$$

Значит,

$$\operatorname{Ker}\tilde\delta=((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}}=V^\sigma/H^\sigma.$$

Мы получаем, что $\operatorname{Ker}\tilde\delta=((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}}$ и $\operatorname{Im}\tilde\delta=(H/(1-\sigma)H)_{\mathrm{tors}}$. Поэтому $\tilde\delta$ определяет изоморфизм

$$\begin{array}{ccc} \delta: B^0(H) & \xrightarrow{\sim} & B_0(H) \\ \| & & \| \\ (V/H)^\sigma/((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}} & & (H/(1-\sigma)H)_{\mathrm{tors}} \end{array}$$

Точно так же доказывается аналогичное утверждение для N.

3.1.0. Замечание. Попутно мы доказали, что

$$((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}}=V^\sigma/H^\sigma, \quad ((W/N)^\sigma)_{\mathrm{div}}=W^\sigma/N^\sigma,$$

$$B^0(H)=(V/H)^\sigma/(V^\sigma/H^\sigma), \quad B^0(N)=(W/N)^\sigma/(W^\sigma/N^\sigma).$$

3.1.1. Замечание. Если для некоторых $x\in V$, $y\in W$

$$x-\sigma x\in H, \quad y-\sigma y\in N,$$

то $x-\sigma x \in H \cap (1-\sigma) V = H_0$, $y-\sigma y \in N \cap (1-\sigma) W = N_0$. Поэтому

$$(V/H)^\sigma = (1-\sigma)^{-1} H_0/H, \quad (W/N)^\sigma = (1-\sigma)^{-1} N_0/N$$

и

$$B^0(H) = (1-\sigma)^{-1} H_0/V^\sigma, \quad B^0(N) = (1-\sigma)^{-1} N_0/W^\sigma.$$

(Здесь $(1-\sigma)^{-1}$ — полный прообраз в V и W соответственно.)

3.2. Цель этого раздела — построить невырожденные спаривания

$$(,)_0 : B_0(H) \times B^0(N) \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l, \qquad (\,,)^0 : B^0(H) \times B_0(N) \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l.$$

3.2.0. Напомним (п. 0.7.0), что $(\,,)$ продолжается до невырожденного Г-инвариантного спаривания векторных пространств

$$(\,,) \;:\; V \times W \to \mathbf{Q}_l, \quad (x, y) = (\sigma x, \sigma y) \;\; \forall x \in V, y \in W.$$

При этом $(1-\sigma) V$ — аннулятор N^σ в V, $(1-\sigma) W$ — аннулятор H^σ в W.

Спаривание $(\,,)$ индуцирует невырожденные Г-инвариантные спаривания двойственных по Понтрягину локально компактных групп

$$H \times W/N \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l, \quad x, y \bmod N \to (x, y) \bmod \mathbf{Z}_l,$$
$$V/H \times N \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l, \quad x \bmod H, y \to (x, y) \bmod \mathbf{Z}_l.$$

При этом аннулятор $(1-\sigma) H$ совпадает с $(W/N)^\sigma$, а аннулятор $(1-\sigma) N$— с $(V/H)^\sigma$. В силу двойственности Понтрягина отсюда вытекает, что $(1-\sigma) H$ — аннулятор $(W/H)^\sigma$, а $(1-\sigma) N$ — аннулятор $(V/H)^\sigma$ (см. [24, теорема 24.10]). Тем самым возникают невырожденные спаривания

$$H/(1-\sigma) H \times (W/H)^\sigma \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l, \quad \underset{x \in H}{x \bmod} (1-\sigma) H, \quad \underset{\substack{y \in W \\ y-\sigma y \in N}}{y \bmod} N \to (x, y) \bmod \mathbf{Z}_l,$$
$$(V/H)^\sigma \times N/(1-\sigma) N \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l, \quad \underset{\substack{x \in V \\ x-\sigma x \in H}}{x \bmod} H, \quad \underset{y \in N}{y \bmod} (1-\sigma) N \to (x, y) \bmod \mathbf{Z}_l.$$

Эти спаривания индуцируют невырожденные спаривания конечных групп ([12, лемма 2.3]):

$$\begin{array}{llll} (,)_0: & B_0(H) & \times B^0(N) & \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \\ & \| & \| & \\ & (H/(1-\sigma) H)_{\mathrm{tors}} & ((W/N)^\sigma/((W/N)^\sigma)_{\mathrm{div}} & \\ (,)^0: & B^0(H) & \times B_0(N) & \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l \\ & \| & \| & \\ & (V/H)/((V/H)^\sigma)_{\mathrm{div}} & (N/(1-\sigma) N)_{\mathrm{tors}} & \end{array}$$

3.2.1. ЛЕММА. *Для любых* $a \in B^0(H)$, $b \in B^0(N)$

$$(a, \delta b)^0 + (\delta a, b)_0 = 0.$$

3.2.2. Доказательство. Пусть

$$a = (x \bmod H) \bmod (V^\sigma/H^\sigma), \quad b = (y \bmod N) \bmod (W^\sigma/N^\sigma),$$
$$x \in V, \quad x - \sigma x \in H, \qquad y \in W, \quad y - \sigma y \in N.$$

Тогда

$$\delta a = (x-\sigma x) \bmod (1-\sigma) H, \quad \delta b = (y-\sigma y) \bmod (1-\sigma) N$$

и

$$(a, \delta b)^0 = (x, y-\sigma y) \bmod \mathbf{Z}_l, \quad (\delta a, b)_0 = (x-\sigma x, y) \bmod \mathbf{Z}_l.$$

Мы должны проверить, что $(a, \delta b)^0 + (\delta a, b)_0 = 0$, т. е. $(x, y-\sigma y) + (x-\sigma x, y) \in \mathbf{Z}_l$.

Имеем:

$$(x, y-\sigma y) + (x-\sigma x, y) = (x-\sigma x, y-\sigma y) + (\sigma x, \sigma y) - (x, y) = (x-\sigma x, y-\sigma y) \in (H, N) = \mathbf{Z}_l.$$

3.3. Определено невырожденное спаривание

$(,)_B : B_0(H) \times B_0(N) \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l, \quad (a, b)_B = (a, \delta^{-1}b)_0 = -(\delta^{-1}a, b)^0.$

3.3.0. Явное описание спаривания $(,)_B$ дается следующими формулами.

Положим $W_0 = (1-\sigma) W$. Тогда $N_0 = W_0 \cap H$—$\mathbf{Z}_l$-решетка в W_0.

Пусть

$$a = \underset{x \in H_0}{x \bmod} (1-\sigma) H \in B_0(H), \qquad b = \underset{y \in N_0}{y \bmod} (1-\sigma) N \in B_0(N).$$

Выберем $z \in W$ такой, что $y = z - \sigma z$. Тогда

$$(a, b)_B = (x, z) \bmod \mathbf{Z}_l \in \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l.$$

3.3.1. Замечание. Пусть эндоморфизм σ пространства V полупрост в единице. Тогда эндоморфизм σ пространства W тоже полупрост в единице (п. 0.7.1, г) и $W_0 = (1-\sigma) W_0$ (п. 0.4, е). Значит, в определении спаривания $(,)_B$ (п. 3.3.0) можно взять $z \in W_0$. Следовательно, спаривание $(,)_B$ полностью определяется значениями спаривания $(,)$ на $H_0 \times W_0$, или, что то же самое, на $H_0 \times N_0$. Иначе говоря, если для некоторого другого совершенного Г-инвариантного спаривания $(,)'$ $(,)' = (,)$ на $H_0 \times \times N_0$, то

$$(,)_B = (,)_B'.$$

3.4. В этом разделе предполагается, что $H = N$ и спаривание $(,) : H \times H \to \mathbf{Z}_l$ симметрично.

3.4.1. ЛЕММА. а) *Спаривание* $(,)_B : B_0(H) \times B_0(H) \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l$ *кососимметрично.*

б) *Следующие условия эквивалентны*:

I. *Спаривание* $(,)_B$ *альтернировано.*

II. *Ограничение* $(,)$ *на* $H_0 = H \cap (1-\sigma) V$ *задает четную квадратичную форму, т. е.* $\forall x_0 \in H_0$ $(x_0, x_0) \in 2\mathbf{Z}_l$.

3.4.1. Замечание. Так как H_0 — ортогональное дополнение к H^σ в H относительно $(,)$ (п. 0.7.0, б), то альтернированность $(,)_B$ эквивалентна четности ограничения $(,)$ на ортогональном дополнении к H^σ в H.

3.4.2. Доказательство. Так как $B_0(H) = \delta B^0(H)$ и

$$(\delta a, \delta b)_B = (\delta a, b)_0 \quad \forall a, b \in B^0(H),$$

то нам достаточно проверить следующие утверждения:

а) Для любых $a, b \in B^0(H)$ $(\delta a, b)_0 + (\delta b, a)_0 = 0$, или, что то же самое, для любых $x, y \in V$ таких, что $x - \sigma x \in H$, $y - \sigma y \in H$,

$$(x-\sigma x, y) + (y-\sigma y, x) = 0.$$

Имеем в силу симметричности:

$$(x-\sigma x, y)+(y-\sigma y, x)=(x-\sigma x, y)+(x, y-\sigma y)=$$
$$=(x-\sigma x, y-\sigma y)\in \mathbf{Z}_l \quad (\text{см. п. } 3.2.2).$$

б) Следующие утверждения эквивалентны:

I. Для любого $a \in B^0(H)$

$$(\delta a, \delta a)_B=(\delta a, a)_0=0$$

или, что то же самое, для каждого $x \in V$ такого, что $x-\sigma x \in H$,

$$(x-\sigma x, x)\in \mathbf{Z}_l.$$

II. $\forall x_0 \in H_0 \ (x_0, x_0)\in 2\mathbf{Z}_l$.

II⇒I. Для любого $x \in V$ такого, что $x-\sigma x \in H$, $x_0=x-\sigma x \in H_0$ и $2(x-\sigma x, x)=(x-\sigma x, x-\sigma x)=(x_0, x_0)\in 2\mathbf{Z}_l$.

Следовательно, $(x-\sigma x, x)\in \mathbf{Z}_l$.

I⇒II. Для любого $x_0 \in H_0$ найдется $x \in V$ такой, что $x-\sigma x=x_0$.

Имеем:

$$(x_0, x_0)=(x-\sigma x, x-\sigma x)=2(x-\sigma x, x)\in 2\mathbf{Z}_l.$$

§ 4. Совершенные спаривания

4. В этом разделе мы несколько обобщим понятие совершенного спаривания. Пусть T и R — свободные $\mathbf{Z}_l$-модули конечного ранга, являющиеся Г-модулями, M — свободный $\mathbf{Z}_l$-модуль ранга 1, являющийся Г-модулем. Будем говорить, что билинейное Г-эквивариантное спаривание e: $T\times R\to M$ совершенно, если отвечающие ему гомоморфизмы $T\to \operatorname{Hom}(R, M)$ и $R\to \operatorname{Hom}(T, M)$ — изоморфизмы. Эквивариантность здесь просто означает, что

$$e(\sigma x, \sigma y)=\sigma e(x, y) \quad \forall x \in T, y \in R.$$

Случай, когда $M=\mathbf{Z}_l$ с тривиальным действием Г, разбирался в п. 0.7.

Цель параграфа — построить по совершенному Г-эквивариантному спариванию e совершенное Г-инвариантное спаривание

$$\Lambda^2 e : \operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M)+\operatorname{Hom}(\Lambda^2 R, M)\to \mathbf{Z}_l$$

и изучить его свойства. Мы начнем с примеров совершенных спариваний.

4.1. Пример. Спаривание

$$\widetilde{\operatorname{tr}} : \operatorname{Hom}(T, R)\times \operatorname{Hom}(R, T)\to \mathbf{Z}_l, \quad u, v \to \operatorname{tr}(uv)=\operatorname{tr}(vu),$$

совершенно и Г-инвариантно. Если $T=R$, то спаривание $\widetilde{\operatorname{tr}}$ симметрично.

4.2. Пусть $(\ ,\ ) : H\times N\to \mathbf{Z}_l$ — совершенное Г-инвариантное спаривание. Предположим, что заданы автоморфизмы Г-модулей H и N порядка 2

$$\tau : H\to H, \quad \tau : N\to N$$

такие, что $(\tau x, \tau y)=(x, y)$ $\forall x \in H, y \in N$. Положим

$$H^-=\{x \in H \mid \tau x=-x\}, \quad N^-=\{y \in N \mid \tau y=-y\}, \quad N^+=\{y \in N \mid \tau y=y\}.$$

Тогда спаривание

$$H^- \times N/N^+ \to \mathbf{Z}_l, \quad x, y \bmod N^+ \to (x, y),$$

Г-инвариантно и совершенно.

Продолжим спаривание (,) и автоморфизмы τ по $\mathbf{Q}_l$-линейности на $H \otimes \mathbf{Q}_l$ и $N \otimes \mathbf{Q}_l$. Положим

$$\tilde{N}^- = \left\{ \frac{1}{2}(y - \tau y) \mid y \in N \right\} \subset N \otimes \mathbf{Q}_l.$$

Тогда определен естественный изоморфизм Г-модулей

$$N/N^+ \xrightarrow{\sim} \tilde{N}^- \ y \bmod N^+ \to \frac{1}{2}(y - \tau y)$$

и спаривание $H^- \times \tilde{N}^- \to \mathbf{Z}_l$, $x, y \to (x, y)$, Г-инвариантно и совершенно.

4.2.0. Если $\tilde{N}^- = \frac{1}{2} N^-$, то возникает совершенное Г-инвариантное спаривание

$$H^- \times N^- \to \mathbf{Z} \ \ x, y \to \frac{1}{2}(x, y).$$

4.3. Пример. Пусть $e : T \times R \to M$ — совершенное Г-эквивариантное спаривание. Тогда определены естественные изоморфизмы Г-модулей

$$\left.\begin{aligned} &\mathrm{Hom}(T, R) = \mathrm{Hom}(T^{\otimes 2}, M) = \begin{cases} \text{модуль билинейных форм на } T \\ \text{со значениями в } M, \end{cases} \\ &\mathrm{Hom}(R, T) = \mathrm{Hom}(R^{\otimes 2}, M) = \begin{cases} \text{модуль билинейных форм на } R \\ \text{со значениями в } M. \end{cases} \end{aligned}\right. \qquad (*)$$

Здесь гомоморфизму $u : T \to R$ отвечает билинейная форма

$$E^u : T \times T \to M, \qquad E^u(x_1, x_2) = e(x_1, ux_2),$$

а гомоморфизму $v : R \to T$ — билинейная форма

$$E^v : R \times R \to M, \quad E^v(y_1, y_2) = e(vy_1, y_2).$$

E^u невырожденна $\Leftrightarrow u$ индуцирует изоморфизм

$$T \otimes \mathbf{Q}_l \xrightarrow{\sim} R \otimes \mathbf{Q}_l.$$

E^v невырожденна $\Leftrightarrow v$ индуцирует изоморфизм

$$R \otimes \mathbf{Q}_l \xrightarrow{\sim} T \otimes \mathbf{Q}_l.$$

4.3.0. Перестановка аргументов задает автоморфизмы порядка 2 на модулях билинейных форм, переносящиеся с помощью изоморфизмов $(*)$ на Hom (T, R) и Hom (R, T). Мы получаем автоморфизмы порядка 2

$$\tau : \mathrm{Hom}(T, R) \to \mathrm{Hom}(T, R), \quad \tau : \mathrm{Hom}(R, T) \to \mathrm{Hom}(R, T),$$

определяемые условиями:

$$e(x_1, ux_2) = e(x_2, (\tau u) x_1) \qquad \forall u \in \mathrm{Hom}(T, R),\ x_1, x_2 \in T,$$

$$e(vy_1, y_2) = e((\tau v) y_2, y_1) \qquad \forall v \in \mathrm{Hom}(R, T),\ y_1, y_2 \in R.$$

Имеем:

$$E^{\tau u}(x_1, x_2) = E^u(x_2, x_1) \qquad \forall x_1, x_2 \in T,\ u \in \mathrm{Hom}(T, R),$$

$$E^{\tau v}(y_1, y_2) = E^v(y_2, y_1) \qquad \forall y_1, y_2 \in R,\ v \in \mathrm{Hom}(R, T).$$

Легко видеть, что

$$\widetilde{\operatorname{tr}}(u, v) = \operatorname{tr}(uv) = \operatorname{tr}(\tau v \tau u) = \operatorname{tr}(\tau u \tau v) = \widetilde{\operatorname{tr}}(\tau u, \tau v)$$

$$\forall u \in \operatorname{Hom}(T, R),\ v \in \operatorname{Hom}(R, T)$$

(след матрицы при транспонировании не меняется).

В обозначениях п. 4.2 имеем:

$$(\operatorname{Hom}(T, R))^{-} = \operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M) = \begin{cases}\text{модуль билинейных альтернирован-}\\ \text{ных форм на } T \text{ со значениями в } M,\end{cases}$$

$$(\operatorname{Hom}(R, T))^{-} = \operatorname{Hom}(\Lambda^2 R, M) = \begin{cases}\text{модуль билинейных альтернированных}\\ \text{форм на } R \text{ со значениями в } M.\end{cases}$$

Легко видеть (например, выбрав базисы в T и R), что

$$(\widetilde{\operatorname{Hom}(R,}\ T))^{-} = \frac{1}{2}\operatorname{Hom}(\Lambda^2 R, M) = \frac{1}{2}(\operatorname{Hom}(R, T))^{-}.$$

Поэтому (п. 4.2.0) определено Г-инвариантное совершенное спаривание

$$\Lambda^2 e : \operatorname{Hom}(\Lambda^2 T,\ M) \times \operatorname{Hom}(\Lambda^2 R,\ M) \to \mathbf{Z}_l,$$

$$\Lambda^2(E^u, E^v) = \frac{1}{2}\widetilde{\operatorname{tr}}(u, v) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(uv) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(vu).$$

4.4 Мы придерживаемся обозначений и соглашений п. 4.3. Предположим дополнительно, что ранг модуля T четен, т. е. $\operatorname{rank} T = \operatorname{rank} R = 2g$ для некоторого натурального g. Обозначим через $I : T \to T$ тождественное преобразование.

4.4.0. ЛЕММА. *Пусть для некоторых* $u : T \to R$, $v : R \to T$ *билинейные формы* E^u *и* E^v *альтернированы, или, что то же самое,* $\tau u = -u$, $\tau v = -v$. *Тогда характеристический многочлен*

$$\mathscr{P}(t) = \det(tI - uv, T) = t^{2g} + a_1 t^{2g-1} + \ldots + a_{2g} \in \mathbf{Z}_l[t]$$

является полным квадратом, т. е. найдется полином

$$\mathscr{P}_0(t) = t^g + b_1 t^{g-1} + \ldots + b_g \in \mathbf{Z}_l[t]$$

такой, что $\mathscr{P}(t) = (\mathscr{P}_0(t))^2$. *В частности,* $a_1 = 2b_1$.

4.4.1. Следствие. *Пусть в предположениях и обозначениях леммы* 4.4.0 *характеристический полином* $\det(tI - uv, T) \in \mathbf{Z}[t]$. *Тогда* $\mathscr{P}_0(t) = t^g + b_1 t^{g-1} + \ldots + b_g \in \mathbf{Z}[t]$. *В частности,* $b_1 \in \mathbf{Z}$ *и* $\Lambda^2 e(E^u, E^v) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(vu) = \frac{1}{2}(-a_1) = -b_1 \in \mathbf{Z}$.

4.4.2. Доказательство леммы 4.4.0. Множество приведенных полиномов степени $2g$ с коэффициентами в $\mathbf{Z}_l$, являющихся полными квадратами, компактно и, следовательно, замкнуто в l-адической топологии. Множество $\{v \in \operatorname{Hom}(R, T) \mid E^v$ невырожденна и альтернирована$\}$ всюду плотно в множестве $\{v \in \operatorname{Hom}(R, T) \mid E^v$ альтернирована$\}$ относительно l-адической топологии (здесь существенна четность рангов T и R). Поэтому нам достаточно доказать лемму в предположении, что форма E^v невырожденна, и, значит, можно считать (п. 4.3), что v индуцирует изоморфизм $R \otimes \mathbf{Q}_l \xrightarrow{\sim} T \otimes \mathbf{Q}_l$.

Введем следующие обозначения: $V=T\underset{\mathbf{Z}_l}{\otimes}\mathbf{Q}_l$, $W=R\underset{\mathbf{Z}_l}{\otimes}\mathbf{Q}_l$. Отвечающий v изоморфизм $W\rightleftarrows V$ будем по-прежнему обозначать через v, отвечающий u гомоморфизм $V\to W$ — через u, тождественное отображение $V\to V$ — через I. Тогда

$$\mathcal{P}(t)=\det\,(tI-vu,\,T)=\det\,(tI-vu,\,V).$$

Зафиксируем (неканонический) изоморфизм $\mathbf{Z}_l$-модулей $\mathrm{M}\approx\mathbf{Z}_l$. Тогда можно считать, что спаривание e принимает значения в $\mathbf{Z}_l$ и продолжается по $\mathbf{Q}_l$-линейности до невырожденного спаривания векторных пространств $e: V\times W\to\mathbf{Q}_l$. При этом

$$e(x_1,\,ux_2)=-e(x_2,\,ux_1)\qquad\forall x_1,\,x_2\in V,$$
$$e(vy_1,\,y_2)=-e(vy_2,\,y_1)\qquad\forall y_1,\,y_2\in W.$$

Определена невырожденная альтернированная билинейная форма

$$\tilde{e}: V\times V\to\mathbf{Q}_l,\qquad\tilde{e}(x_1,\,x_2)=e(x_1,\,v^{-1}x_2).$$

Имеем для любых $x_1,\,x_2\in V$:

$$\tilde{e}((vu)\,x_1,\,x_2)=e(vux_1,\,v^{-1}x_2)=-e(vv^{-1}x_2,\,ux_1)=-e(x_2,\,ux_1)=$$
$$=e(x_1,\,ux_2)=e(x_1,\,v^{-1}(vu)\,x_2)=\tilde{e}(x_1,\,(vu)\,x_2).$$

Мы получили, что

$$\tilde{e}((vu)\,x_1,\,x_2)=\tilde{e}(x_1,\,(vu)\,x_2)\qquad\forall x_1,\,x_2\in V.$$

Поэтому для доказательства леммы 4.4.0 нам достаточно установить следующий элементарный факт.

4.4.3. Предложение. *Пусть $\tilde{e}: V\times V\to\mathbf{Q}_l$ — невырожденное альтернированное спаривание, z — эндоморфизм V такой, что $\tilde{e}(zx_1,\,x_2)=\tilde{e}(x_1,\,zx_2)$ $\forall x_1,\,x_2\in V$. Тогда характеристический многочлен* $\det\,(tI-z,\,V)\in\mathbf{Q}_l[t]$ *является полным квадратом.*

4.4.4. Доказательство предложения 4.4.3. Билинейная форма

$$f: V\times V\to\mathbf{Q}_l,\qquad f(x_1,\,x_2)=\tilde{e}(zx_1,\,x_2),$$

альтернирована. Зафиксируем в V базис, в котором матрица формы $\tilde{e}$ принимает стандартный вид $\begin{pmatrix}0 & 1_g\\ -1_g & 0\end{pmatrix}$. Обозначим через Z матрицу формы f. $\det\begin{pmatrix}0 & 1_g\\ -1_g & 0\end{pmatrix}=1$. Матрица z равна $\begin{pmatrix}0 & 1_g\\ -1_g & 0\end{pmatrix}^{-1}Z$.

Для любого $a\in\mathbf{Q}_l$ матрица билинейной формы $a\tilde{e}-f$ равна $a\begin{pmatrix}0 & 1_g\\ -1_g & 0\end{pmatrix}-Z$. Определитель матрицы $a\begin{pmatrix}0 & 1_g\\ -1_g & 0\end{pmatrix}-Z$ равен определителю эндоморфизма $aI-z$ пространства V, т. е.

$$\det\left(a\begin{pmatrix}0 & 1_g\\ -1_g & 0\end{pmatrix}-Z\right)=\det\,(aI-z,\,V).$$

Обозначим через $\mathrm{Pf}\,(t)\in\mathbf{Q}_l[t]$ полином такой, что для любого $a\in\mathbf{Q}_l$ $\mathrm{Pf}\,(a)$ равен пфаффиану матрицы $a\begin{pmatrix}0 & 1_g\\ -1_g & 0\end{pmatrix}-Z$.

Имеем:

$$\operatorname{Pf}(a)^2 = \det\left(a\begin{pmatrix} 0 & 1_g \\ -1_g & 0\end{pmatrix} - Z\right) = \det(aI - z, V).$$

Поэтому соответствующее равенство справедливо в кольце полиномов $\mathbf{Q}_l[t]$, т. е.

$$\operatorname{Pf}(t)^2 = \det(tI - z, V).$$

4.5. В этом разделе мы предполагаем, что $T=R$ и спаривание $e: T\times\times T\to M$ альтернировано. Тогда ранг $T=2g$ четен. Спаривание $\Lambda^2 e$ симметрично. Кроме того, $e\in(\operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M))^\Gamma = (\operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M))^\sigma$, $e=E^I$, где $I: T\to T$ — тождественный эндоморфизм. Поэтому $\Lambda^2 e(E^u, e) = \frac{1}{2}\operatorname{tr} u$, где u — эндоморфизм T, а форма E^u альтернирована. Применяя лемму 4.4.0 к u и I, получаем, что

$$\det(tI - u, T) = \det(tI - Iu, T) = (\mathscr{P}_0(t))^2$$

для некоторого $\mathscr{P}_0(t)\in\mathbf{Z}_l[t]$. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ — набор корней полинома $\mathscr{P}_0$. Тогда $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \alpha_g$ — набор характеристических чисел эндоморфизма u. Имеем:

$$\Lambda^2 e(E^u, E^u) = \frac{1}{2}\operatorname{tr}(u^2) = \sum_{i=1}^{g}\alpha_i^2,$$

$$\Lambda^2 e(E^u, E^u) = \sum_{i=1}^{q}\alpha_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{g}\alpha_i\right)^2 - 2\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\operatorname{tr} u\right)^2 - 2\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j = [\Lambda^2 e(e, E^u)]^2 - 2\sum_{i<j}\alpha_i\alpha_j \in [\Lambda^2 e(e, E^u)]^2 + 2\mathbf{Z}_l.$$

В частности, если $\Lambda^2 e(e, E^u)=0$, то $\Lambda^2 e(E^u, E^u)\in 2\mathbf{Z}_l$. Но $e\in\in[\operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M)]^\sigma$. Поэтому если E^u ортогонально $[\operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M)]^\sigma$ относительно $\Lambda^2 e$, то $\Lambda^2 e(E^u, E^u)\in 2\mathbf{Z}_l$, т. е. ограничение $\Lambda^2 e$ на ортогональное дополнение к $[\operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M)]^\sigma$ задает четную квадратичную форму.

4.6. ТЕОРЕМА. *Пусть $e: T\times R\to M$ — совершенное* Γ*-эквивариантное спаривание. Тогда определено естественное невырожденное спаривание*

$$(\Lambda^2 e)_B : B_0(\operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M))\times B_0(\operatorname{Hom}(\Lambda^2 R, M))\to\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l,$$

которое альтернировано, если $B_0(\operatorname{Hom}(\Lambda^2 R, M)$ может быть отождествлено с $B_0(\operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M))$ с помощью изоморфизма $T\approx R$, превращающего e в альтернированную форму.

4.6.0. Доказательство. Положим $H=\operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M)$, $N=\operatorname{Hom}(\Lambda^2 R, M)$, $(\,,\,)=\Lambda^2 e$. Тогда конструкция п. 3.3 дает невырожденное спаривание

$$(\Lambda^2 e)_B : B_0(\operatorname{Hom}(\Lambda^2 T, M))\times B_0(\operatorname{Hom}(\Lambda^2 R, M))\to\mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l.$$

Второе утверждение теоремы 4.6 немедленно вытекает из замечания 3.4.1.0 и последнего утверждения п. 4.5.

4.7. ТЕОРЕМА. *Пусть $e: T\times R\to M$ — совершенное* Γ*-эквивариантное спаривание свободных $\mathbf{Z}_l$-модулей четного ранга. Пусть автоморфизм σ*

пространства $T\otimes\mathbf{Q}_l$ *полупрост, и пусть* $H_0\subset\mathrm{Hom}\,(T,\ R)$, $N_0\subset\mathrm{Hom}\,(R,\ T)$ — *свободные* $\mathbf{Z}$-*модули конечного ранга такие, что естественные гомоморфизмы* $H_0\otimes\mathbf{Z}_l\to\mathrm{Hom}\,(T,\ R)$, $N_0\otimes\mathbf{Z}_l\to\mathrm{Hom}\,(R,\ T)$ *задают изоморфизмы*

$$H_0\otimes\mathbf{Z}_l=[\mathrm{Hom}\,(T,R)]^\Gamma,\quad N_0\otimes\mathbf{Z}_l=[\mathrm{Hom}\,(R,T)]^\Gamma.$$

Предположим, кроме того, что для любых $u\in H_0$, $v\in N_0$ *характеристический многочлен* $\det(tI-vu,\ T)$ *лежит в* $\mathbf{Z}[t]$.

Положим

$$H_0^-=\{u\in H_0\,|\,\tau u=-u\},\quad N_0^-=\{v\in N_0\,|\,\tau v=-v\}.$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

а) *Для любых* $u\in H_0^-$, $v\in N_0^-$ $\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(vu)\in\mathbf{Z}$. *Тем самым определено спаривание*

$$e_0: H_0^-\times N_0^-\to\mathbf{Z},\quad u,v\to\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(uv)=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(vu).$$

б) *Спаривание* e_0 *невырожденно.*

в) *Выберем в* H_0^- *и* N_0^- *базисы и обозначим через* Δ_0 *модуль определителя матрицы билинейной формы, отвечающей* e_0. *Тогда*

$$\left|\prod_\beta(1-\beta)\right|_l=[B_0\,(\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2T,\ M))]\,|\,\Delta_0\,|_l,$$

где β *пробегает набор нееденичных характеристических чисел эндоморфизма* σ *пространства* $\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2T,\ M)\otimes\mathbf{Q}_l$.

4.7.1. Доказательство. Утверждение а) немедленно вытекает из следствия 4.4.1. Для доказательства утверждений б) и в) следует напомнить, что изоморфизмы (*) (п. 4.3) определяют естественные изоморфизмы

$$\{u\in\mathrm{Hom}\,(T,\ R)\,|\,\tau u=-u\}=\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2T,\ M),\quad u\to E^u,$$
$$\{v\in\mathrm{Hom}\,(R,\ T)\,|\,\tau v=-v\}=\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2R,\ M),\quad v\to E^v,$$

которые влекут за собой изоморфизмы

$$\{u\in\mathrm{Hom}\,(T,\ R)\,|\,\tau u=-u\}^\Gamma=[\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2T,\ M)]^\Gamma,$$
$$\{v\in\mathrm{Hom}\,(R,\ T)\,|\,\tau v=-v\}^\Gamma=[\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2R,\ M)]^\Gamma$$

и

$$H_0^-\otimes\mathbf{Z}_l=\{u\in H_0\otimes\mathbf{Z}_l\,|\,\tau u=-u\}=\{u\in[\mathrm{Hom}\,(T,R)]^\Gamma,\ \tau u=-u\}=$$
$$=\{u\in\mathrm{Hom}\,(T,R)\,|\,\tau u=-u\}^\Gamma=[\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2T,M)]^\Gamma,$$

т. е. $H_0^-\otimes\mathbf{Z}_l=[\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2T,\ M)]^\Gamma$,

$$N_0^-\otimes\mathbf{Z}_l=\{v\in N_0\otimes\mathbf{Z}_l\,|\,\tau v=-v\}=\{v\in\mathrm{Hom}\,(R,T)^\Gamma\,|\,\tau v=-v\}=$$
$$=\{v\in\mathrm{Hom}\,(R,T)\,|\,\tau v=-v\}^\Gamma=[\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2R,M)]^\Gamma,$$

т. е. $N_0^-\otimes\mathbf{Z}_l=[\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2R,\ M)]^\Gamma$.

Напомним, что $\Lambda^2e\,(E^u,E^v)=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(vu)=\frac{1}{2}\,\mathrm{tr}\,(uv)$, т. е. спаривание Λ^2e индуцирует на $H_0^-\times N_0^-$ спаривание, совпадающее с e_0. Кроме того, так как M одномерен, то автоморфизм σ пространства M полупрост и, значит, автоморфизм σ пространства $\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T, M)\otimes \mathbf{Q}_l$ полупрост и, следовательно (п. 0.4), полупрост в единице. Полагая $H=\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T, M)$, $N=\mathrm{Hom}(\Lambda^2 R, M)$, $(,)=\Lambda^2 e$ и применяя утверждения п. 0.7.8 и следствие 0.7.9, получаем утверждения б) и в).

ЧАСТЬ III. АБЕЛЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

§ 5. Основные результаты

5. На протяжении этой части через X обозначается абелево многообразие над k, через X^t — абелево многообразие над k, двойственное к X (см. [7], [8], [15]). Определен канонический изоморфизм $X^{tt}\approx X$ (см. [7], [8], [15]). Каждому гомоморфизму $\lambda : X\to X^t$ отвечает двойственный гомоморфизм $\lambda^t : X=X^{tt}\to X^t$. Каждому гомоморфизму $\mu : X^t\to X$ отвечает двойственный гомоморфизм $\mu^t : X^t\to X^{tt}=X$.

Положим

$$H_0=\mathrm{Hom}(X, X^t),\quad N_0=\mathrm{Hom}(X^t, X),$$

$$H_0^- = \{\lambda\in H_0 \mid \lambda^t=\lambda\},\quad N_0^- = \{\mu\in N_0 \mid \mu^t=\mu\}.$$

Определены естественные изоморфизмы свободных абелевых групп конечного ранга ([15], [8])

$$\mathrm{NS}(X)\rightleftarrows H_0^-,\quad L\to\varphi_L;\quad \mathrm{NS}(X^t)\rightleftarrows N_0^-,\quad P\to\varphi_P,$$

индуцированные гомоморфизмами

$$\mathrm{Pic}\, X\to\mathrm{Hom}(X, X^t),\quad L\to\varphi_L;$$
$$\mathrm{Pic}\, X^t\to\mathrm{Hom}\,(X^t, X^{tt})=\mathrm{Hom}(X^t, X),\quad P\to\varphi_P.$$

Через $1_X : X\to X$, $1_{X^t} : X^t\to X^t$ обозначаются тождественные автоморфизмы X и X^t соответственно.

5.0. Для любого n, взаимно простого с p, через ${}_nX$ обозначается ${}_nX(\bar{k})$, через ${}_nX^t$ обозначается ${}_nX^t(k)$, через $\bar{\mu}_n$ — группа корней степени n из 1 в $\bar{k}$.

Определено естественное невырожденное Г-эквивариантное спаривание Вейля ([18], [15], [7])

$$\bar{e}_n : {}_nX\times{}_nX^t\to\bar{\mu}_n,$$
$$\bar{e}_n(\sigma x, \sigma y)=\sigma\bar{e}_n(x, y).$$

5.0.1. Теория Куммера, спаривание Вейля и теорема Хопфа — Бореля [25] позволяют построить естественные изоморфизмы (см. [1])

$$H^2(\overline{X}, \mu_n)=\mathrm{Hom}(\Lambda_n^2 X, \bar{\mu}_n)=\begin{cases}\text{группа альтернированных билинейных}\\ \text{форм на } {}_nX \text{ со значениями в } \bar{\mu}_n,\end{cases}$$

$$H^2(\overline{X}^t, \mu_n)=\mathrm{Hom}(\Lambda_n^2 X^t, \bar{\mu}_n)=\begin{cases}\text{группа альтернированных билинейных}\\ \text{форм на } {}_nX^t \text{ со значениями в } \bar{\mu}_n.\end{cases}$$

5.1. Пусть l — простое число $\neq p$. Положим

$$T_l(X)=\varprojlim_{l^m} X,\quad T_l(X^t)=\varprojlim_{l^m} X^t.$$

$T_l(X)$ и $T_l(X^t)$ — l-модули Тэйта абелевых многообразий X и X^t, являющиеся свободными $\mathbf{Z}_l$-модулями ранга $2\dim X=2\dim X^t$. $\mathbf{Z}_l$-модули $T_l(X)$ и $T_l(X^t)$ снабжены непрерывным действием группы Γ, и эндоморфизмы σ пространств $T_l(X)\otimes\mathbf{Q}_l$ и $T_l(X^t)\otimes\mathbf{Q}_l$ полупросты ([19], [8]).

Имеем: $M_l=\varprojlim\bar{\mu}_{l^m}$ (см. п. 2.1). M_l — свободный $\mathbf{Z}_l$-модуль ранга 1, являющийся Γ-модулем.

Определены естественные вложения

$$\mathrm{Hom}(X,\ X^t)\otimes\mathbf{Z}_l\hookrightarrow\mathrm{Hom}(T_l(X),\ T_l(X^t)),$$
$$\mathrm{Hom}(X^t,\ X)\otimes\mathbf{Z}_l\hookrightarrow\mathrm{Hom}(T_l(X^t),\ T_l(X)),$$

с образами которых мы будем отождествлять $\mathbf{Z}_l$-модули $\mathrm{Hom}(X,\ X^t)\otimes\otimes\mathbf{Z}_l$, $\mathrm{Hom}(X^t,\ X)\otimes\mathbf{Z}_l$. Тогда (см. [19])

$$\mathrm{Hom}(X,\ X^t)\otimes\mathbf{Z}_l=[\mathrm{Hom}(T_l(X),\ T_l(X^t))]^\Gamma,$$
$$\mathrm{Hom}(X^t,\ X)\otimes\mathbf{Z}_l=[\mathrm{Hom}(T_l(X^t),\ T_l(X))]^\Gamma.$$

5.1.0. Спаривания Вейля $\bar{e}_{l^m}$ согласованы для различных m и определяют совершенное Γ-эквивариантное спаривание ([8, § 20])

$$e_l: T_l(X)\times T_l(X^t)\to M_l,$$
$$e_l(\sigma x,\ \sigma y)=\sigma e_l(x,\ y)\qquad\forall x\in T_l(X),\ y\in T_l(X^t).$$

Спаривание e_l кососимметрично в следующем смысле. Если

$$e_l^t:\ T_l(X^t)\times T_l(X^{tt})(=T_l(X))\to M_l$$

— спаривание, отвечающее абелеву многообразию X^t, то ([7, гл. 7, § 2, теорема 5, III])

$$e_l(x,\ y)=-e_l^t(y,\ x)\qquad\forall\ x\in T_l(X)=T_l(X^{tt}),\ y\in T_l(X^t).$$

Поэтому из функториальности спаривания Вейля вытекает ([7, гл. VII, § 2]), что для любых $\lambda: X\to X^t$, $\mu: X^t\to X$

$$e_l(x_1,\ \lambda x_2)=-e_l(x_2,\ \lambda^t x_1)\qquad\forall x_1,\ x_2\in T_l(X),$$
$$e_l(\mu y_1,\ y_2)=-e_l(\mu^t y_2,\ y_1)\qquad\forall y_1,\ y_2\in T_l(X^t).$$

Определим автоморфизмы порядка 2

$$\tau:\mathrm{Hom}(T_l(X),\ T_l(X^t))\to\mathrm{Hom}(T_l(X),\ T_l(X^t)),$$
$$\tau:\mathrm{Hom}(T_l(X^t),\ T_l(X))\to\mathrm{Hom}(T_l(X^t),\ T_l(X))$$

формулами (п. 4.7)

$$e_l(x_1,\ ux_2)=e_l(x_2,\ (\tau u)\,x_1)\qquad\forall\ x_1,\ x_2\in T_l(X),\ u\in\mathrm{Hom}(T_l(X),\ T_l(X^t)),$$
$$e_l(vy_1,\ y_2)=e_l((\tau v)\,y_2,\ y_1)\qquad\forall\ y_1,\ y_2\in T_l(X^t),\ v\in\mathrm{Hom}(T_l(X^t),\ T_l(X)).$$

Тогда для любых $\lambda: X\to X^t$, $\mu: X^t\to X$ $\tau\lambda=-\lambda^t$, $\tau\mu=-\mu^t$ и (п. 5)

$$H_0^-=\{\lambda\in H_0\,|\,\tau\lambda=-\lambda\},\qquad N_0^-=\{\mu\in N_0\,|\,\tau\mu=-\mu\}.$$

5.1.1. Напомним ([8, § 19]), что для любых $u\in\mathrm{End}\,X$, $v\in\mathrm{End}\,X^t$ характеристические многочлены $\det(t1_X-u,\ T_l(X))$, $\det(t1_{X^t}-v,\ T_l(X^t))$ лежат в $\mathbf{Z}[t]$ и не зависят от l. В частности, для любых $\lambda: X\to X^t$, $\mu: X^t\to X$

характеристические многочлены $\det(t1_X-\mu\lambda,\ T_l(X))=\det(t1_{X^t}-\lambda\mu,\ T_l(X^t))$ лежат в $\mathbf{Z}[t]$ и не зависят от l. Тем самым определены естественные гомоморфизмы (групп)

$$\mathrm{Tr}:\mathrm{End}\,X\to\mathbf{Z},\quad \mathrm{Tr}:\mathrm{End}\,X^t\to\mathbf{Z},$$

удовлетворяющие следующим условиям. Для любого $u\in\mathrm{End}\,X$ $\mathrm{Tr}(u)$ равен следу u как эндоморфизма $T_l(X)$ (для всех $l\neq p$). Для любого $v\in\mathrm{End}\,X^t$ $\mathrm{Tr}(v)$ равен следу v как эндоморфизма $T_l(X^t)$ (для всех $l\neq\neq p$). В частности $\mathrm{Tr}(1_X)=2\dim X=2\dim X^t=\mathrm{Tr}\,(1_{X^t})$, $\mathrm{Tr}\,(\lambda\mu)==\mathrm{Tr}(\mu\lambda)$ $\forall\lambda:X\to X^t,\ \mu:X^t\to X$.

Согласно п. п. 4.7.1 и 5.1.0 для любых $\lambda\in H_0^-=\{\lambda\in\mathrm{Hom}(X,X^t)\,|\,\tau\lambda==-\lambda\}$, $\mu\in N_0^-=\{\mu\in\mathrm{Hom}(X^t,X)\,|\,\tau\mu=-\mu\}$

$$\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\lambda\mu)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\mu\lambda)\in\mathbf{Z}.$$

Тем самым определено невырожденное (п. 4.7.1, а)) спаривание

$$e_0:H_0^-\times N_0^-\to\mathbf{Z},\quad \lambda,\mu\to\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\mu\lambda)=\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\lambda\mu).$$

Напомним, что определены естественные изоморфизмы (п. 5)

$$\mathrm{NS}\,(X)\cong H_0^-,\quad L\to\varphi_L;\quad \mathrm{NS}\,(X^t)\cong N_0^-,\quad P\to\varphi_P.$$

Следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{lll}
\mathrm{NS}\,(X)\times\mathrm{NS}\,(X^t)\to\mathbf{Z}, & & L,\ P\to\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\varphi_P\varphi_L),\\
\downarrow\wr\qquad\quad\ \downarrow\wr & \| & \\
H_0^-\qquad\ \times N_0^-\qquad\ \to\mathbf{Z}, & & \lambda,\ \mu\to\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\mu\lambda).
\end{array}$$

Применяя теорему 4.7 для $T=T_l(X)$, $R=T_l(X^t)$, $M=M_l$, $e=e_l$ (остальные обозначения совпадают), немедленно получаем следующий результат.

5.1.2. ТЕОРЕМА. *Спаривание e_0 невырожденно. Выберем базисы $\{L_i\}$ в* $\mathrm{NS}\,(X)$ *и $\{P_i\}$ в* $\mathrm{NS}\,(X^t)$. *Тогда $\{\varphi_{P_i}\}$ — базис в N_0^-, а $\{\varphi_{L_i}\}$ — базис в H_0^-. Обозначим через $\Delta_0(X)$ модуль определителя матрицы* $\left(\frac{1}{2}\mathrm{Tr}\,(\varphi_{P_i}\varphi_{L_j})\right)$. *Тогда*

$$\left|\prod_\beta(1-\beta)\right|_l=[B_0\,(\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2T_l(X),M_l))]\,|\,\Delta_0\,(X)\,|_l,$$

где β пробегает набор неединичных характеристических чисел эндоморфизма σ пространства $\mathrm{Hom}\,(\Lambda^2T_l(X),M_l)\otimes\mathbf{Q}_l$.

5.1.2.0. Определение. а) Пусть $f:A\times B\to\mathbf{Z}$ — невырожденное спаривание свободных $\mathbf{Z}$-модулей конечного ранга. Выберем в A и B базисы и обозначим через Δ модуль определителя матрицы билинейной формы, отвечающей f. Число Δ не зависит от выбора базисов и называется модулем определителя спаривания f.

б) Пусть A — свободный $\mathbf{Z}$-модуль конечного ранга и $f:A\times A\to\mathbf{Z}$ — невырожденное спаривание. Выберем базис в A и обозначим через $\det f$

определитель матрицы билинейной формы, отвечающей f. Число $\det f$ не зависит от выбора базиса и называется определителем спаривания f. Если Δ — модуль определителя спаривания f, то $\Delta = |\det f|$.

5.1.2.1. В обозначениях и предположениях п. 5.1.2.0, б) пусть A_1 — подгруппа конечного индекса в A и $f_1 : A_1 \times A_1 \to \mathbf{Z}$ — ограничение спаривания f на A_1. Тогда если $\det f_1$ — определитель спаривания f_1, то

$$\det f_1 = \det f [A : A_1]^2.$$

5.1.2.2. Замечание. Число $\Delta_0(X)$ является модулем определителя спаривания

$$\mathrm{NS}(X) \times \mathrm{NS}(X^t) \to \mathbf{Z}, \quad L, P \to \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\varphi_P \varphi_L).$$

5.1.3. Применяя теорему 4.6 для $T = T_l(X)$, $R = T_l(X^t)$, $M = M_l$, $e = e_l$, получаем следующий результат.

5.1.4. ТЕОРЕМА. *Определено естественное невырожденное спаривание*

$$(\Lambda^2 e_l)_B : B_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X), M_l)) \times B_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X^t), M_l)) \to \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l.$$

Спаривание $(\Lambda^2 e_l)_B$ *альтернировано, если* $B_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X^t), M_l))$ *может быть отождествлено с* $B_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X), M_l))$ *с помощью изоморфизма* $T_l(X) \approx T_l(X^t)$, *превращающего спаривание Вейля* e_l *в альтернированную форму.*

5.1.5. Замечание. Пусть X — абелево многообразие с главной поляризацией, т. е. на X задан обратимый обильный пучок L степени 1 (см. [7], [8]). Тогда гомоморфизм $\varphi_L : X \to X^t$ — изоморфизм. Отвечающий φ_L изоморфизм $T_l(X) \xrightarrow{\sim} T_l(X^t)$ превращает спаривание Вейля e_l в альтернированную форму (см. [8]). Поэтому спаривание $(\Lambda^2 e_l)_B$ становится альтернированным при отождествлении $B_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X^t), M_l))$ с $B_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X), M_l))$ с помощью изоморфизма $X \approx X^t$, возникающего из главной поляризации.

5.1.6. Изоморфизмы п. 5.0.1 согласованы для различных $n = l^m$ (см. [1]). Переходя к проективному пределу по m, получаем естественные изоморфизмы Г-модулей

$$H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1)) = \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X), M_l),$$
$$H^2(\overline{X}^t, \mathbf{Z}_l(1)) = \mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X^t), M_l).$$

Тем самым

$$B_0(H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))) = B_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X), M_l)),$$
$$B_0(H^2(\overline{X}^t, \mathbf{Z}_l(1))) = H_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X^t), M_l)).$$

Но (п. 2.3.6.0)

$$\mathrm{Br}'(X)(l) = B_0(H^2(\overline{X}, \mathbf{Z}_l(1))),$$
$$\mathrm{Br}'(X^t)(l) = B_0(H^2(\overline{X}^t, \mathbf{Z}_l(1))).$$

Поэтому

$$\mathrm{Br}'(X)(l) = B_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X), M_l)),$$
$$\mathrm{Br}'(X^t)(l) = B_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X^t), M_l)).$$

5.1.7. Напомним, что

$$\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\text{-}p) = \coprod_{l\neq p} \mathrm{Br}'(X)(l), \quad \mathrm{Br}'(X^t)(\mathrm{non}\text{-}p) = \coprod_{l\neq p} \mathrm{Br}'(X^t)(l),$$

$$\mathbf{Q}/\mathbf{Z} = \coprod_{l} \mathbf{Q}/\mathbf{Z}(l) = \coprod_{l} \mathbf{Q}_l/\mathbf{Z}_l.$$

Из теоремы 5.1.4 и замечания 5.1.5 немедленно вытекает следующий результат.

5.1.8. ТЕОРЕМА. *Определено естественное невырожденное спаривание*

$$e_X : \mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\text{-}p) \times \mathrm{Br}'(X^t)(\mathrm{non}\text{-}p) \to \mathbf{Q}/\mathbf{Z},$$

совпадающее на l-компонентах со спариваниями $(\Lambda^2 e_l)_B$. Спаривание e_X альтернировано, если $\mathrm{Br}'(X^t)(\mathrm{non}\text{-}p)$ *может быть отождествлено с* $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\text{-}p)$ *с помощью изоморфизма $X \simeq X^t$, возникающего из главной поляризации.*

5.1.9. Следствие. *Определен естественный изоморфизм*

$$\mathrm{Br}'(X^t)(\mathrm{non}\text{-}p) = \mathrm{Hom}(\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\text{-}p), \mathbf{Q}/\mathbf{Z}).$$

Группы $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\text{-}p)$ *и* $\mathrm{Br}'(X^t)(\mathrm{non}\text{-}p)$ *изоморфны (не канонически).*

5.1.10. Следствие. *Если X — абелево многообразие с главной поляризацией, то порядок* $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\text{-}p)$ *— полный квадрат.*

5.1.11. Напомним (п. 2.1.2), что определено положительное рациональное число $c_2(X)$ такое, что

$$c_2(X) = \prod_{\beta} (1 - \beta),$$

где β пробегает набор неединичных характеристических чисел эндоморфизма σ пространства $H^2(\bar{X}, \mathbf{Z}_l(1)) \otimes \mathbf{Q}_l$ (п. 2.1.2). Из теоремы 5.1.2 и изоморфизма $\mathrm{Br}'(X)(l) = B_0(\mathrm{Hom}(\Lambda^2 T_l(X), M_l))$ (п. 5.1.6) немедленно вытекает, что

$$|c_2(X)|_l = [\mathrm{Br}'(X)(l)]\, |\Delta_0(X)|_l.$$

5.1.12. ТЕОРЕМА. *Произведение порядка группы* $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\text{-}p)$ *на $\Delta_0(X)$ с точностью до p-множителя совпадает с $c_2(X)$, т. е.*

$$c_2(X) = p^i [\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\text{-}p)]\, \Delta_0(X)$$

для некоторого целого i.

5.1.13. Доказательство. Из последнего равенства п. 5.1.11 вытекает, что

$$\prod_{l\neq p} |c_2(X)|_l = \Big(\prod_{l\neq p} [\mathrm{Br}'(X)(l)] \prod_{l\neq p} |\Delta_0(X)|_l.$$

Но порядок группы $\mathrm{Br}'(X)(\mathrm{non}\text{-}p) = \coprod_{l\neq p} \mathrm{Br}'(X)(l)$ равен $\prod_{l\neq p} [\mathrm{Br}'(X)(l)]$. С другой стороны, для некоторых целых i_1, j_1

$$c_2(X) = p^{i_1} \prod_{l\neq p} |c_2(X)|_l, \quad \Delta_0(X) = p^{j_1} \prod_{l\neq p} |\Delta_0(X)|_l$$

(см. п. 0.5.1). Полагая $i=i_1-j_1$, получаем:

$$c_2(X)=p^{i_1}\prod_{l\neq p}|c_2(X)|_l=p^{i_1}\left(\prod_{l\neq p}[\mathrm{Br}'(X)(l)]\right)\prod_{l\neq p}|\Delta_0(X)|_l=$$
$$=p^{i_1}[\mathrm{Br}'(X)(\text{non-}p)]\,p^{-j_1}\Delta_0(X)=p^i[\mathrm{Br}'(X)(\text{non-}p)]\,\Delta_0(X).$$

5.1.14. Следствие.

$$\mathcal{P}_2(X,q^{-s})\sim p^i[\mathrm{Br}'(X)(\text{non-}p)]\Delta_0(X)(1-q^{1-s})^{\rho(X)}$$

при $s\to 1$ (*для некоторого целого* i).

5.1.15. Доказательство немедленно вытекает из теоремы 5.1.12, справедливости гипотезы (Т) для абелевых многообразий (п. 2.1.5) и свойств $c_2(X)$ (см. 2.1.2).

§ 6. Индексы пересечения и гипотеза Артина — Тэйта

6. Все обозначения и соглашения предыдущего параграфа остаются в силе.

Напомним, что определены естественные сюръективные гомоморфизмы $\mathrm{Div}\,X\to\mathrm{Pic}\,X\to\mathrm{NS}(X)$, где $\mathrm{Div}\,X$ — группа дивизоров, и дивизору D отвечает обратимый пучок $\mathcal{O}_X(D)$.

6.0. ТЕОРЕМА. *Пусть X — абелево многообразие над k, $g=\dim X\geqslant\geqslant 2$, $L=\mathcal{O}_X(C)$ — обратимый обильный пучок степени 1 на X. Тогда спаривание*

$$\mathrm{NS}(X)\times\mathrm{NS}(X)\to\mathbf{Q},\quad \mathcal{O}_X(D_1),\ \mathcal{O}_X(D_2)\to(D_1\cdot D_2\cdot C^{g-2})/(g-2)!,$$

где символ $(D_1\cdot D_2\cdot C^{g-2})$ обозначает полный индекс пересечения классов дивизоров на X, целочисленно и невырожденно, а его определитель равен $(-1)^{\rho(X)-1}(g-1)\Delta_0(X)$.

6.0.0. Замечание. $\dfrac{(C^g)}{g!}=1$ (см. [8, 16]).

6.1. Следствие. *В предположениях и обозначениях теоремы* 6.0

$$\mathcal{P}_2(X,q^{-s})\sim p^i\frac{(-1)^{\rho(X)-1}}{g-1}\det\left(\frac{D_i\cdot D_j\cdot C^{g-2}}{(g-2)!}\right)(1-q^{1-s})^{\rho(X)}$$

при $s\to 1$ (*для некоторого целого* i). *Здесь* $\{D_i\}_{i=1}^{\rho(X)}$ — *базис группы* $\mathrm{NS}(X)$.

6.1.0. Замечание. Если X — абелева поверхность, т. е. $g=2$, то спаривание, фигурирующее в формулировке теоремы 6.0,— индекс пересечения, и следствие 6.1 превращается в утверждение гипотезы Артина — Тэйта для абелевых поверхностей (с точностью до p-множителя) (см. [18]).

6.1.1. Замечание. Для эллиптических кривых группа Брауэра тривиальна.

6.2. Доказательство теоремы 6.0. Заметим, что $\varphi_L: X\to X^t$ — изоморфизм. В частности,

$$\mathrm{NS}(X)=\{\varphi_L^* P\,|\,P\in\mathrm{NS}(X^t)\}.$$

Положим $R=\{\varphi_L^{-1}\varphi_S\,|\,S\in\mathrm{NS}(X)\}\subset\mathrm{End}\,X$. Легко видеть ([8, § 20]), что $R=\{u\in\mathrm{End}\,X\,|\,u'=u\}$, где $'$ — инволюция Розати, отвечающая L.

6.2.0. ЛЕММА.

$$R=\{\varphi_L^{-1}\varphi_S \mid S\in \mathrm{NS}(X)\}=\{\varphi_P\varphi_L \mid P\in \mathrm{NS}(X^t)\}\subset \mathrm{End}\,X.$$

6.2.1. Доказательство немедленно вытекает из коммутативности следующей диаграммы (см. [7, гл. 5, § 2, предложение 11]):

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\varphi_L"] \arrow[d, "\varphi_{(\varphi_L^* P)}"'] & X^t \arrow[d, "\varphi_P"] \\ X^t & X = X^{tt} \arrow[l, "\varphi_L^t=\varphi_L"] \end{tikzcd} \qquad P\in \mathrm{NS}(X^t)$$

и равенства $\mathrm{NS}(X)=\{\varphi_L{}^*P \mid P\in \mathrm{NS}(X^t)\}$ (п. 6.2).

6.2.1.0. Определены естественные изоморфизмы

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{NS}(X) \rightleftarrows R & = & R \leftrightarrows \mathrm{NS}(X^t) \\ S\to\varphi_L^{-1}\varphi_S & & \varphi_P\varphi_L\leftarrow P \end{array}$$

6.2.2. Напомним (п. 5.1.2.0), что число $\Delta_0(X)$ равно модулю определителя спаривания

$$\mathrm{NS}(X)\times \mathrm{NS}(X^t)\to \mathbf{Z},\quad S, P\to\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\varphi_P\,\varphi_S).$$

Так как $\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\varphi_P\varphi_S)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,((\varphi_P\varphi_L)(\varphi_L^{-1}\varphi_S))$, то $\Delta_0(X)$ равен модулю определителя спаривания

$$R\times R\to\mathbf{Z},\quad u, v\to\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(uv),$$

или, что то же самое, модулю определителя спаривания

$$f:\mathrm{NS}(X)\times\mathrm{NS}(X)\to\mathbf{Z},\quad P_1, P_2\to\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(\varphi_L^{-1}\varphi_{P_1}\varphi_L^{-1}\varphi_{P_2}).$$

Поскольку для любого $P\in\mathrm{NS}(X)$ $(\varphi_L^{-1}\varphi_P)'=\varphi_L^{-1}\varphi_P$ (п. 6.2), то $\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,((\varphi_L^{-1}\varphi_P)^2)\geqslant 0$ ([8, § 21, теорема 1]). Следовательно, определитель симметричного спаривания (п. 5.1.2.0)

$$f:\mathrm{NS}(X)\times\mathrm{NS}(X)\to\mathbf{Z},\quad P_1, P_2\to\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,((\varphi_L^{-1}\varphi_{P_1})(\varphi_L^{-1}\varphi_{P_2})),$$

положителен и совпадает с $\Delta_0(X)$.

Заметим, что $1_X=\varphi_L{}^{-1}\varphi_L$ и

$$f(L, L)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,((1_X)^2)=\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,(1_X)=g\ (\text{см. п. } 5.1.1).$$

Следующая лемма будет доказана в конце параграфа.

6.3. ЛЕММА. *Для любого* $P=\mathcal{O}_X(D)\in\mathrm{Pic}\,X$ *характеристический многочлен* $\det(t1_X-\varphi_P, T_l(X))\in\mathbf{Z}_l[t]$ *равен* $(\mathcal{P}_D(t))^2$, *где*

$$\mathcal{P}_D(t)=((tC-D)^g)/g!=t^g-\binom{g}{1}\frac{(D\cdot C^{g-1})}{g!}t^{g-1}+$$
$$+\binom{g}{2}\frac{(D^2\cdot C^{g-2})}{g!}t^{g-2}+\cdots+(-1)^g\frac{(D^g)}{g!}.$$

6.3.0. Замечание. Для любого $u \in \operatorname{End} X$ характеристический многочлен $\det(t1_X - u, T_l(X)$ лежит в $\mathbf{Z}[t]$ и не зависит от l (п. 5.1.1).

6.3.1. Следствие. *Полином* $\mathcal{P}_D(t)$ *лежит в* $\mathbf{Z}[t]$. *В частности,* $\frac{(D \cdot C^{g-1})}{(g-1)!} = g\frac{(D \cdot C^{g-1})}{g!}$ *и* $\frac{1}{2}\frac{(D^2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!} = \binom{g}{2}\frac{(D^2 \cdot C^{g-2})}{g!}$ — *целые числа.*

6.3.2. Следствие. *Для любых классов дивизоров* D_1, D_2

$$\frac{(D_1 \cdot D_2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!} = \frac{1}{2}\frac{((D_1+D_2)^2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!} - \frac{1}{2}\frac{(D_1^2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!} - \frac{1}{2}\frac{(D_2^2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!} \in \mathbf{Z}.$$

Иначе говоря, определено симметричное целочисленное спаривание

$$f^L : \mathrm{NS}(X) \times \mathrm{NS}(X) \to \mathbf{Z}, \quad \mathcal{O}_X(D_1),\ \mathcal{O}_X(D_2) \to (D_1 \cdot D_2 \cdot C^{g-2})/(g-2)!$$

Заметим, что

$$f^L(L, L) = \frac{(C^g)}{(g-2)!} = g(g-1) \text{ (см. п. 5.1.1).}$$

Мы должны доказать, что определитель спаривания f^L равен определителю спаривания f, умноженному на $(-1)^{\rho(X)-1}(g-1)$.

6.3.3. Следствие. *Пусть* $P = \mathcal{O}_X(D)$. *Тогда*

а) $\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\varphi_L^{-1}\varphi_P) = (D \cdot C^{g-1})/(g-1)!$

б) $\frac{1}{2}\operatorname{Tr}((\varphi_L^{-1}\varphi_P)^2) = \left(\frac{(D \cdot C^{g-1})}{(g-1)!}\right)^2 - \frac{(D^2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!}$.

6.3.4. Доказательство. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_g$ — набор корней полинома $\mathcal{P}_D(t)$. Тогда $\alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_g, \alpha_g$ — набор характеристических чисел эндоморфизма $\varphi_L^{-1}\varphi_P$ пространства $T_l(X) \otimes \mathbf{Q}_l$, а $\alpha_1^2, \alpha_1^2, \ldots, \alpha_g^2, \alpha_g^2$ — набор характеристических чисел эндоморфизма $\varphi_L^{-1}\varphi_P$ пространства $T_l(X) \otimes \mathbf{Q}_l$. Имеем:

$$\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\varphi_L^{-1}\varphi_P) = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i, \qquad \frac{1}{2}\operatorname{Tr}((\varphi_L^{-1}\varphi_P)^2) = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i^2.$$

Но из явной формулы для коэффициентов P_D (п. 6.3) и теоремы Виета получаем:

$$\frac{(D \cdot C^{g-1})}{(g-1)!} = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i, \qquad \frac{1}{2}\frac{(D^2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!} = \sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{2}\operatorname{Tr}(\varphi_L^{-1}\varphi_P) = (D \cdot C^{g-1})/(g-1)!;$$

$$\frac{1}{2}\operatorname{Tr}((\varphi_L^{-1}\varphi_P)^2) = \sum_{i=1}^{g} \alpha_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{g} \alpha_i\right)^2 - 2\sum_{i<j} \alpha_i\alpha_j = \left(\frac{(D \cdot C^{g-1}}{(g-1)!}\right)^2 - \frac{(D^2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!}.$$

6.3.5. Следствие. *Для любых* $P_1 = \mathcal{O}_X(D_1)$, $P_2 = \mathcal{O}_X(D_2)$

$$f(P_1, P_2) = \frac{1}{2}\operatorname{Tr}((\varphi_L^{-1}\varphi_{P_1})(\varphi_L^{-1}\varphi_{P_2})) = \frac{(D_1 \cdot C^{g-1})}{(g-1)!}\frac{(D_2 \cdot C^{g-1})}{(g-1)!} - \frac{(D_1 \cdot D_2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!}.$$

Тем самым для доказательства теоремы 6.0 мы должны установить, что определитель $\det f$ спаривания (п. 5.1.2.0)

$$f: \mathrm{NS}(X) \times \mathrm{NS}(X) \to \mathbf{Z}, \quad \mathcal{O}_X(D_1), \mathcal{O}_X(D_2) \to$$
$$\to \frac{(D_1 \cdot C^{g-1})}{(g-1)!} \cdot \frac{(D_2 \cdot C^{g-1})}{(g-1)!} - \frac{(D_1 \cdot D_2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!}$$

равен определителю $\det f^L$ спаривания

$$f^L: \mathrm{NS}(X) \times \mathrm{NS}(X) \to \mathbf{Z}, \quad \mathcal{O}_X(D_1), \mathcal{O}_X(D_2) \to \frac{(D_1 \cdot D_2 \cdot C^{g-2})}{(g-2)!},$$

умноженному на $(-1)^{\rho(X)-1}(g-1)$, т. е.

$$\det f^L = (-1)^{\rho(X)-1} \det f.$$

6.3.6. Замечание. Из формул предыдущего пункта вытекает, что для любых $P_1 = \mathcal{O}_X(D_1)$, $P_2 = \mathcal{O}_X(D_2)$

$$f(P_1, P_2) = (g-1)^{-2} \cdot f^L(P_1, L) f^L(P_2, L) - f^L(P_1, P_2).$$

В частности,

$$f(P_1, L) = (g-1)^{-2} \cdot f^L(P_1, L) \cdot f^L(L, L) - f^L(P_1, L) = f^L(P_1, L)/(g-1)$$

(см. п. 6.3.2).

6.4. Положим

$$A_0 = \{P \in \mathrm{NS}(X) \mid f^L(P, L) = 0\} \subset \mathrm{NS}(X),$$
$$A = A_0 + \mathbf{Z}L \subset \mathrm{NS}(X)$$

— подгруппа конечного индекса в $\mathrm{NS}(X)$, а A_0 — свободный $\mathbf{Z}$-модуль ранга $\rho(X)-1$ ($\rho(X)$ — ранг $\mathrm{NS}(X)$).

Обозначим через

$$f_0: A \times A \to \mathbf{Z},$$
$$f_0^L: A \times A \to \mathbf{Z}$$

ограничения спариваний f и f^L на $A \times A$. Так как

$$\det f_0 = \det f[\mathrm{NS}(X) : A]^2, \quad \det f_0^L = \det f^L[\mathrm{NS}(X) : A]^2$$

(см. п. 5.1.2.1), то нам достаточно доказать следующее утверждение (п. 6.3.5).

6.4.0. Предложение. $\det f_0^L = (-1)^{\rho(X)-1}(g-1) \det f_0$.

6.4.1. Доказательство. Напомним, что $A = A_0 + \mathbf{Z}L$ и ранг A_0 равен $\rho(X)-1$.

Для любого $P \in A_0$ по определению $f_0^L(P, L) = f^L(P, L) = 0$ и (п. 6.3.6) $f_0(P, L) = f(P, L) = f^L(P, L)/(g-1) = 0$.

Для любых $P_1, P_2 \in A_0$

$$f_0(P_1, P_2) = f(P_1, P_2) = (g-1)^{-2} f^L(P_1, L) f^L(P_2, L) -$$
$$- f^L(P_1, P_2) = -f^L(P_1, P_2) = -f_0^L(P_1, P_2).$$

Кроме того,

$$f_0^L(L, L) = f^L(L, L) = (g-1)g = (g-1) f(L, L) = (g-1) f_0(L, L).$$

Резюмируем: $\mathbf{Z}$-модуль A представим в виде прямой суммы подмодуля A_0 ранга $\rho(X)-1$ и подмодуля $\mathbf{Z}L$ ранга 1, ортогональных друг другу относительно спариваний f_0^L и f_0.

На A_0 $f_0^L=-f_0$, а на $\mathbf{Z}L$ $f_0^L=(g-1)f_0$. Отсюда немедленно следует, что

$$\det f_0^L=(-1)^{\rho(X)-1}(g-1)\det f_0.$$

6.5. Доказательство леммы 6.3. Для любого обратимого пучка $P=\mathcal{O}_X(D)$

$$\det(\varphi_L^{-1}\varphi_P,\ T_l(X))=\left[\frac{(D^g)}{g!}\right]^2$$

(см. [8, § 16, теорема 1, § 19, теорема 4]). В частности, для любого целого n $L^n\otimes P^{-1}\approx\mathcal{O}_X(nC-D)$,

$$\varphi_{L^n\otimes P^{-1}}=n\varphi_L-\varphi_P,\quad \varphi_L^{-1}(\varphi_{L^n\otimes P^{-1}})=n1_X-\varphi_L^{-1}\varphi_P$$

и

$$\det(n1_X-\varphi_L^{-1}\varphi_P,\ T_l(X))=\left[\frac{(nC-D)^g}{g!}\right]^2.$$

Поэтому для любого целого n

$$\det(n1_X-\varphi_L^{-1}\varphi_P,\ T_l(X))=(P_D(n))^2,$$

где

$$P_D(t)=\frac{(tC-D)^g}{g!}=t^g-\binom{g}{1}\frac{(D\cdot C^{g-1})}{g!}t^{g-1}+$$
$$+\binom{g}{2}\frac{(D^2\cdot C^{g-2})}{g!}t^{g-2}+\cdots+(-1)^g\frac{(D^g)}{g!}.$$

Следовательно,

$$\det(t1_X-\varphi_L^{-1}\varphi_P,\ T_l(X))=(P_D(t))^2.$$

6.6. Пример. Пусть $\operatorname{End}X$ — кольцо целых в поле $E'=\operatorname{End}X\otimes\mathbf{Q}$. Тогда E' — мнимое квадратичное расширение вполне вещественного поля E степени g, инволюция Розати есть комплексное сопряжение ([19], [8, § 21]), $R=E\cap\operatorname{End}X$ (п. 6.2) — кольцо целых в E. $T_l(X)$ — свободный $R\otimes\mathbf{Z}_l$-модуль ранга 2 [27], т. е. отображение $\frac{1}{2}\operatorname{Tr}$: $R\to\mathbf{Z}$ совпадает с ограничением гомоморфизма следа $E\to\mathbf{Q}$. Значит, $\Delta_0(X)$ равен дискриминанту поля E (см. п. 6.2.2).

Литература

1. *Беркович В. Г.* О группе Брауэра абелевых многообразий.— Функц. анализ и его прилож., 1972, т. 6, № 3, с. 10—15.
2. *Воскресенский В. Е.* Алгебраические торы. М.: Наука, 1977.
3. *Grothendieck A.* Le groupe de Brauer. I, II, III.— In: Dix exposés sur la cohomologie des schemas. Amsterdam; North Holland, 1968, p. 46—188.
4. *Делинь П.* Гипотеза Вейля. I.— Успехи матем. наук, 1975, т. 30, № 5, с. 159—190.
5. *Hoobler R.* Brauer groups of abelian schemes.— Ann. scient. Ecole Norm. Sup., 4-e serie, 1972, v. 5, № 1, p. 45—70.
6. *Hoobler R.* Cohomology of purely inseparable Galois covering.— J. reine angew. Math., 1974, v. 266, p. 183—199.
7. *Lang S.* Abelian varieties. New York: Interscience 1959.
8. *Мамфорд Д.* Абелевы многообразия. М.: Мир, 1971.
9. *Манин Ю. И.* Кубические формы. М.: Наука, 1972.
10. *Manin Yu. I.* Le groupe de Brauer — Grothendieck en Géometrie diophantienne.— In:

Actes de Congres International de Mathematicians (Nice, 1970). Paris: Gauthier — Villars, 1971, t. 1, p. 401—411.
11. *Milne J.* Étale cohomology. Princeton: Princeton University Press, 1980.
12. *Milne J.* On a conjecture of Artin and Tate.— Ann. Math., 1975, v. 102, № 2, p. 517—533.
13. *Milne J.* The Tate — Šafarevic group of a constant abelian variety.— Invent. Math., 1968, v. 6, № 1, p. 91—105.
14. *Milne J.* Extension of abelian varieties over finite fields.— Invent. Math., 1968, v. 5, № 1, p. 63—84.
15. *Oda T.* The first de Rham cohomology and Dieudonne modules.— Ann. scient. Ecole Norm. Sup., 4-e serie, 1969, v. 2, № 1, p. 63—135.
16. *Серр Ж.-П.* Когомологии Галуа. М.: Мир, 1968.
17. *Tate J.* Algebraic cycles and poles of zeta-functions.— In: Arithmetical Algebraic Geometry. New York: Harper and Row, 1965, p. 93—110.
18. *Тэйт Дж.* О гипотезах Берча и Свиннертона-Дайера и их геометрическом аналоге.— Математика, 1968, 12 : 6, с. 41—55.
19. *Тэйт Дж.* Эндоморфизмы абелевых многообразий над конечными полями.— Математика, 1968, 12 : 6, с. 31—40.
20. *Tate J.* Relations between K_2 and Galois cohomology.— Invent. Math., 1976, v. 36, p. 257—274.
21. *Artin M., Grothendieck A., Verdier J.-L.* Theorie de topos et cohomologie étale de schemas (SGA4), tome 3.— Lect. Notes Math., 1973, v. 305, Springer — Verlag.
22. *Artin M., Swinnerton-Dyer H. P. F.* The Shafarevich — Tate conjecture for pencils of elliptic curves on $K3$ surfaces.— Invent. Math., 1973, v. 20, № 3, p. 249—266.
23. *Ogus A.,* Supersingular $K3$ crystals.— Asterisque, 1979, 64, p. 3—86.
24. *Хьюит Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ, т. I. М.: Наука, 1975.
25. *Kleiman S. L.* Algebraic cycles and the Weyl conjectures.— In: Dix exposés sur la cohomologie des schémas. Amsterdam: North — Holland, 1968, p. 359—386.
26. *Schneider P.* On the values of the zeta-function of a variety over a finite field. IHES, preprint, February 1981.
27. *Ribet K. A.* Galois action on division points of abelian varieties with real multiplications.— Amer. J. Math., 1976, v. 98, № 3, p. 751—804.

Поступила в редакцию
7.VII.1981