Toets Algebra 1

3 april 2019

11:00-13:00

Bij deze toets mag het dictaat gebruikt worden, maar geen rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen (dus ook geen telefoons).

(1) Gegeven zijn de permutaties

$$\sigma = (\ 1\ \ 2\ \ 5\ ),$$
$$\tau = (\ 1\ \ 9\ \ 6\ \ 10\ \ 5\ \ 13\ \ 7\ \ 8\ \ 4\ \ 11\ \ 2\ \ 3\ \ 12\ )$$

in de groep S_{13}.

(a) Schrijf het product $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$ als het product van disjuncte cykels.
(b) Bepaal de ordes van de drie elementen σ, τ en $\sigma\tau$.
(c) Bepaal de tekens van de drie elementen σ, τ en $\sigma\tau$.
(d) Hoeveel elementen van S_{13} zijn geconjugeerd met τ?

(2) Zij $f\colon G \to G'$ een homomorfisme met kern

$$\ker f = \{e\}.$$

Bewijs dat voor elk element $x \in G$ de orde van $f(x)$ gelijk is aan de orde van x.

(3) Zij G een groep met twee ondergroepen H_1 en H_2. Stel dat er geldt

$$H_1 \cup H_2 = G.$$

Bewijs dat er geldt $H_1 = G$ of $H_2 = G$.

(4) Hoeveel ondergroepen van orde 4 heeft S_4? Geef ze allemaal.

(5) Geef voor elk van de volgende beschrijvingen een voorbeeld.
(a) Een groep G met een ondergroep H van index $[G : H] = 3$.
(b) Een surjectief homomorfisme f met een kern van orde $\#\ker(f) = 2$.
(c) Een groep G met precies 2019 conjugatieklassen.