Uitwerkingen toets Algebra 1
3 april 2019

We geven een korte schets van mogelijke uitwerkingen. Hier en daar moet voor de volledigheid nog wel een argument toegevoegd worden.

(1) Gegeven zijn de permutaties

$$\sigma = (\ 1\ \ 2\ \ 5\ ),$$
$$\tau = (\ 1\ \ 9\ \ 6\ \ 10\ \ 5\ \ 13\ \ 7\ \ 8\ \ 4\ \ 11\ \ 2\ \ 3\ \ 12\ )$$

in de groep S_{13}.

(a) Schrijf het product $\sigma\tau = \sigma \circ \tau$ als het product van disjuncte cykels.
(b) Bepaal de ordes van de drie elementen σ, τ en $\sigma\tau$.
(c) Bepaal de tekens van de drie elementen σ, τ en $\sigma\tau$.
(d) Hoeveel elementen van S_{13} zijn geconjugeerd met τ?

Uitwerking.
(a) $\sigma\tau = (\ 1\ \ 9\ \ 6\ \ 10\ )(\ 2\ \ 3\ \ 12\ )(\ 4\ \ 11\ \ 5\ \ 13\ \ 7\ \ 8\ )$.
(b) Respectievelijk 3, 13 en 12 (kleinste gemene veelvoud van lengtes van disjuncte cykels).
(c) Allemaal 1 (k-cykel heeft teken $(-1)^{k-1}$; we nemen het product van de tekens van alle cykels).
(d) De permutaties die geconjugeerd zijn met τ zijn precies de 13-cykels. Daarvan zijn er $(13!)/13 = 12!$.

(2) Zij $f\colon G \to G'$ een homomorfisme met kern

$$\ker f = \{e\}.$$

Bewijs dat voor elk element $x \in G$ de orde van $f(x)$ gelijk is aan de orde van x.

Uitwerking. Zij k een geheel getal. Schrijf $y = f(x) \in G'$. Als er geldt $x^k = e$, dan ook $y^k = (f(x))^k = f(x^k) = f(e) = e'$. Andersom, als er geldt $y^k = e'$, dan geldt er $f(x^k) = (f(x))^k = y^k = e'$, dus $x^k \in \ker f = \{e\}$ en dus $x^k = e$. Met andere woorden, de gehele getallen k waarvoor geldt $x^k = e$ zijn precies de gehele getallen waarvoor geldt $y^k = e'$. Hieruit volgt direct dat de orde van x gelijk is aan de orde van $y = f(x)$.

(3) Zij G een groep met twee ondergroepen H_1 en H_2. Stel dat er geldt

$$H_1 \cup H_2 = G.$$

Bewijs dat er geldt $H_1 = G$ of $H_2 = G$.

Uitwerking 1. Blijkbaar is $H_1 \cup H_2$ een groep, waaruit volgt dat H_1 bevat is in H_2 of andersom, wegens opgave 2.28. (Deze opgave mocht je niet gebruiken, dus dit moet je nog bewijzen.) Dat betekent dat de vereniging, en dus G, gelijk is aan H_1 of H_2.

Uitwerking 2 werkt alleen voor eindige groepen... Stel G is eindig, zeg $n = \#G$. Wegens de Stelling van Lagrange (4.8) zijn de ordes $\#H_1$ en $\#H_2$ delers van n. Stel nu dat H_1 en H_2 beide niet gelijk aan G zijn. Dan geldt er $\#H_1 \leq n/2$ en $\#H_2 \leq n/2$. Omdat de doorsnede $H_1 \cap H_2$ het element e bevat geldt $\#(H_1 \cap H_2) \geq 1$, dus we vinden de tegenspraak

$$n = \#G = \#(H_1 \cup H_2) = \#H_1 + \#H_2 - \#(H_1 \cap H_2) \leq n/2 + n/2 - 1 = n - 1 < n.$$

We concluderen dat H_1 of H_2 wel gelijk is aan G.

(4) Hoeveel ondergroepen van orde 4 heeft S_4? Geef ze allemaal.

Uitwerking. De cyclische ondergroepen van orde 4 worden voortgebracht door een element van orde 4 en dat betekent in S_4 een 4-cykel. Er zijn zes 4-cykels, maar elke 4-cykel brengt dezelfde ondergroep voort als zijn inverse. Dat geeft alvast drie ondergroepen, namelijk

- $\langle (\ 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ ) \rangle = \langle (\ 1\ \ 4\ \ 3\ \ 2\ ) \rangle$,
- $\langle (\ 1\ \ 3\ \ 2\ \ 4\ ) \rangle = \langle (\ 1\ \ 4\ \ 2\ \ 3\ ) \rangle$,
- $\langle (\ 1\ \ 2\ \ 4\ \ 3\ ) \rangle = \langle (\ 1\ \ 3\ \ 4\ \ 2\ ) \rangle$.

De overige ondergroepen van orde 4 hebben geen elementen van orde 4 en bestaan naast de identiteit dus uit alleen elementen van orde 2. Dat zijn de elementen

$$(1\ \ 2), (1\ \ 3), (1\ \ 4), (2\ \ 3), (2\ \ 4), (3\ \ 4), (1\ \ 2)(3\ \ 4), (1\ \ 3)(2\ \ 4), (1\ \ 4)(2\ \ 3).$$

Stel H is een ondergroep van S_4 van orde 4 die niet cyclisch is. Dan bevat het drie van bovenstaande elementen. We beschouwen het aantal transposities dat H bevat. Als dit er nul zijn, dan bevat H dus de laatste drie van bovenstaande permutaties, namelijk de drie producten van twee disjuncte transposities. Deze vormen samen met de identiteit inderdaad een groep, dus er is precies één zo'n groep.

Als H precies één transpositie bevat, dan bevat H twee van de laatste drie elementen, maar dan ook het product daarvan en dan dus alle drie de laatste elementen. Samen met de identiteit zou H dan minstens vijf elementen bevatten, wat in tegenspraak is met het feit dat H orde 4 heeft.

Als H twee niet-disjuncte transposities bevat, dan bevat H ook het product, wat een 3-cykel is, wat is tegenspraak is met het feit dat de orde van een element van H een deler is van 4 wegens Gevolg 4.9.

Als H twee disjuncte transposities bevat, dan ook het product van de twee, en dit geeft samen met de identiteit inderdaad een groep van orde 4. Zo vinden we nog drie groepen, namelijk

- $\langle (\ 1\ \ 2\ ), (\ 3\ \ 4\ ) \rangle$,
- $\langle (\ 1\ \ 3\ ), (\ 2\ \ 4\ ) \rangle$,
- $\langle (\ 1\ \ 4\ ), (\ 2\ \ 3\ ) \rangle$.

Als H drie transposities zou bevatten, dan zijn er minstens twee niet disjunct, en zitten we in een eerder geval.

We vinden in totaal dus zeven ondergroepen van S_4 van orde 4.

(5) Geef voor elk van de volgende beschrijvingen een voorbeeld.
(a) Een groep G met een ondergroep H van index $[G : H] = 3$.
(b) Een surjectief homomorfisme f met een kern van orde $\# \ker(f) = 2$.
(c) Een groep G met precies 2019 conjugatieklassen.

Uitwerking.
(a) Bijvoorbeeld G een cyclische groep van orde 3 en H de triviale ondergroep.
(b) Bijvoorbeeld het triviale (en unieke) homomorfisme van de groep $\{\pm 1\}$ naar de triviale groep $\{1\}$ dat alles stuurt naar 1.
(c) Bijvoorbeeld een cyclische groep met 2019 elementen, die abels is.