Uitwerkingen toets Algebra 1

12 april 2018

Drie opgaven voor 9 punten elk, dus $T \leq 27$ punten in toaal. Cijfer is $1 + T/3$.
Voor elk van de opmerkingen waar je volgens de onderstaande puntenverdeling punten kunt krijgen geldt dat je die punten niet volledig krijgt als het niet duidelijk is opgeschreven, of als het niet duidelijk is dat je de opmerking hebt begrepen.

(1) Hoeveel conjugatieklassen heeft S_4? Geef voor elke klasse een representant.
[Een representant van een klasse is een element dat in die klasse zit.]

Uitwerking. De conjugatieklassen zijn de verzamelingen van elementen met hetzelfde cykeltype (opg. 2.46). De cykeltypes komen overeen met de partities van $n = 4$, dus de manieren om 4 te schrijven als som van positieve getallen. Daar zijn er vijf van en dat geeft de cykeltypes $(4), (3, 1), (2, 2), (2, 1, 1), (1, 1, 1, 1)$. Er zijn dus vijf conjugatieklassen en representanten zijn respectievelijk $(1\,2\,3\,4)$ en $(1\,2\,3)$ en $(1\,2)(3\,4)$ en $(1\,2)$ en (1).
[Deze hebben orde respectievelijk $4, 3, 2, 2$ en 1.]

Puntenverdeling. Totaal: 9 punten.
(3p) voor de opmerking dat conjugatieklassen corresponderen met cykeltypes, inclusief het tonen van begrip wat dit betekent,
(3p) voor het geven van een volledige lijst van de vijf cykeltypes,
(3p) voor het geven van een volledige lijst representanten, plus het duidelijk aangeven dat het representanten zijn.

(2) Is er een injectief homomorfisme van D_6 naar S_4?
[Geef een voorbeeld of bewijs dat zo'n homomorfisme niet bestaat.]

Uitwerking. Stel $f\colon G \to G'$ is een injectief homomorfisme. Zij $x \in G$ een element van orde n. We claimen dat $y = f(x)$ ook orde n heeft. Er geldt $x^n = e$ en bovendien $x^k \neq e$ voor elk geheel getal k met $0 < k < n$. Omdat f een homomorfisme is, volgt $y^n = f(x)^n = f(x^n) = f(e) = e'$. Voor elk geheel getal k met $0 < k < n$ volgt wegens injectiviteit van f dat $y^k = f(x)^k = f(x^k) \neq f(e)$, dus $y^k \neq e'$. Dit bewijst de claim.

Omdat D_6 een element van orde $n = 6$ bevat (rotatie om het centrum van de regelmatige zeshoek over $60°$), zou het beeld van een injectief homomorfisme $f\colon D_6 \to S_4$ ook een element van orde 6 bevatten. Maar S_4 bevat geen elementen van orde 6 (zie bijvoorbeeld de vorige opgave), dus er is geen injectief homomorfisme $f\colon D_6 \to S_4$.

Puntenverdeling. Totaal: 9 punten.
(5p) voor het opmerken (2p) en bewijzen (3p) dat injectieve homomorfismen elementen van orde n sturen naar elementen van orde n,
(2p) voor het opmerken dat D_6 een element van orde 6 heeft,
(2p) voor het opmerken (1p) en bewijzen (1p) dat S_4 geen element van orde 6 heeft.

(3) Zij G een groep. Zij $H \lhd G$ een normale ondergroep van orde 2.
Bewijs dat H bevat is in het centrum $Z(G)$ van G.

Uitwerking. Zij $h \in H$ het unieke element dat niet gelijk aan het eenheidselement e is, dus $H = \{e, h\}$. Voor elk element $g \in G$ geldt $gHg^{-1} = H$, dus $\{geg^{-1}, ghg^{-1}\} = \{e, h\}$. Omdat geg^{-1} gelijk is aan e, volgt ook $ghg^{-1} = h$, dus $gh = hg$. Dit betekent dat h commuteert met alle elementen van G, dus er geldt $h \in Z(G)$, dus ook $H \subset Z(G)$.

Opmerking. Zij G een groep, H een normale ondergroep en $g \in G$ een element. Uit de gelijkheid $gH = Hg$ volgt in het algemeen niet dat $gh = hg$ voor alle $h \in H$. Check bijvoorbeeld $H = A_3$ en $G = S_3$ en $g = (12)$.

Puntenverdeling. Totaal: 9 punten.
(2p) voor opmerken dat $H = \{e, h\}$ voor e het eenheidselement en h een ander element.
(2p) voor het gebruiken dat H normaal is: $\{geg^{-1}, ghg^{-1}\} = \{e, h\}$ voor alle $g \in G$.
(2p) voor het opmerken dat $geg^{-1} = e$ en $e \in Z(G)$,
(3p) voor het op de juiste manier concluderen dat $ghg^{-1} = h$ voor alle $g \in G$ en het daaruit concluderen dat $h \in Z(G)$ (conclusie telt voor 1 van de 3 punten).