De Zariski-topologie versus de 'sterke' topologie

Voor variëteiten over $\mathbb{C}$ is het zinvol om naast de Zariski-topologie ook de euclidische ('sterke') topologie te bekijken. Hiervoor gelden onder meer de volgende eigenschappen: de sterke topologie is fijner dan de Zariski-topologie; de sterke topologie op $X \times Y$ is het product van de sterke topologieën op X en Y; de sterke topologie op $\mathbb{A}^1$ is precies de euclidische topologie op $\mathbb{C}$. Er volgt bijvoorbeeld dat variëteiten over $\mathbb{C}$ Hausdorffs zijn in de sterke topologie.

Een variëteit over een lichaam k heet *compleet* als voor alle variëteiten Y over k de projectie $X \times Y \to Y$ gesloten is. Een nuttig resultaat is nu het volgende: een variëteit X over $\mathbb{C}$ is compleet $\Leftrightarrow$ X is compact in de sterke topologie. In [1], §I.10 wordt een bewijs gegeven dat gebruik maakt van een aantal lemma's die op zichzelf ook interessant zijn. Zo volgt de implicatie $\Rightarrow$ vrij snel uit het zogenaamde Chow's Lemma: elke complete variëteit is het beeld onder een surjectief birationaal morfisme van een projectieve variëteit. En projectieve variëteiten zijn compact. Voor de implicatie $\Leftarrow$ kan men uit de voeten met de observatie dat een niet-leeg Zariski open stuk van een variëteit niet alleen dicht is in de Zariski-topologie maar ook in de sterke topologie.

Onderwerp van een bachelorwerkstuk kan zijn om de technieken te begrijpen die in het bewijs van bovengenoemde equivalentie gaan zitten. Onder andere is het hiervoor nodig een meer algemene definitie van een variëteit over een lichaam k te leren dan degene die in Chapter I van Hartshorne wordt gehanteerd. Chapter I van Mumford's Red Book [1] kan hierbij een uitstekend hulpmiddel zijn. Voorts kan worden gedacht aan veralgemeningen van het genoemde resultaat naar andere lokaal compacte topologische lichamen. Er blijkt te gelden: neem een lokaal compact topologisch lichaam K, zij $k \subset K$ een deellichaam en zij X een variëteit over k. Dan geldt: X is compleet $\Leftrightarrow$ voor elke eindige uitbreiding K' van K is de verzameling $X(K')$ van K'-rationale punten van X compact in de sterke topologie. Voor dit resultaat zijn aan de ene kant meer analytisch en aan de andere kant meer algebraïsch georiënteerde bewijzen te geven. Het bewijs van deze equivalentie dat in [2] staat maakt voor de implicatie $\Leftarrow$ gebruik van de ingewikkelde inbeddingsstelling van Nagata (elke variëteit is isomorf met een open deel van een complete variëteit), maar deze wordt in [1] nergens gebruikt. Kunnen we zonder ?

Literatuur

[1] D. Mumford, The Red Book of varieties and schemes. Lecture Notes in Mathematics 1358.
[2] O. Lorscheid, Completeness and compactness for varieties over a local field. Archiv der Mathematik **88** (2007), pp. 344–348.

Begeleider: R.S. de Jong.