$\mathrm{Aut}(S_6)$.

1. Automorfismen van groepen

Een automorfisme van een groep G is een isomorfisme van G naar zichzelf. Onder samenstelling vormt de verzameling van automorfismen van G een groep die $\mathrm{Aut}(G)$ genoteerd wordt.

Als a een element van G is dan is de afbeelding $g \mapsto aga^{-1}$, "conjugatie met a", een automorfisme van G. Conjugatie met ab is hetzelfde als conjugatie met b gevolgd door conjugatie met a. Conjugatie met a is triviaal als en slechts als a met alle elementen van G commuteert, met andere woorden, als en slechts als a in het centrum $Z(G)$ van G zit. Dit alles geeft een injectief groepshomomorfisme

$$G/Z(G) \to \mathrm{Aut}(G) : aZ(G) \mapsto [g \mapsto aga^{-1}].$$

Het beeld van dit homomorfisme is een normaaldeler (opgave!) en het quotiënt wordt gewoonlijk $\mathrm{Out}(G)$ genoemd. (Wat nogal eens tot spraakverwarring leidt.)

Er bestaan G waarvoor $\mathrm{Out}(G)$ niet triviaal is, probeer maar eens $\mathrm{Out}(\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})$ en $\mathrm{Out}(V_4)$ uit te rekenen.

2. De Out van S_n

Zij $n > 2$, zodat $Z(S_n) = 1$.

Stelling. $\mathrm{Out}(S_n) = 1$ *tenzij* $n = 6$ *en* $\#\mathrm{Out}(S_6) = 2$.

Het bewijs van deze op het eerste gezicht verbazende stelling is vrij eenvoudig en staat in bijna alle leerboeken over groepentheorie. Het studeren van dit bewijs kan een mooie manier zijn om enige ervaring met "Out" op te doen.

Er zijn allerhande mooie en minder mooie combinatorische beschrijvingen van elementen in $\mathrm{Aut}(S_6)$ die naar het niettriviale element in $\mathrm{Out}(S_6)$ afbeelden. Sommige daarvan maken gebruik van projectieve meetkunde over eindige lichamen.

3. Automorfismen van S_6

Er geldt dus blijkbaar dat $\mathrm{Aut}(S_6)$ een normale ondergroep heeft van index 2 die isomorf is met S_6. Maar dit feit legt de groep $\mathrm{Aut}(S_6)$ niet vast. Is het misschien een direct product? Een semidirect product?

Een bachelorscriptie over $\mathrm{Aut}(S_6)$ zou kunnen sommige van de volgende vragen behandelen:

(1) Waarom is $\mathrm{Out}(S_n) = 1$ voor $n \neq 6$?
(2) Wat zijn de (meetkundige) constructies van het niet-triviale element van $\mathrm{Out}(S_n)$ die in de literatuur te vinden zijn?
(3) Zijn er verbanden tussen de verschillende constructies?
(4) Kan men een "kanoniek" element van $\mathrm{Aut}(S_6)$ aanduiden welke afbeeldt op het niet-triviale element van $\mathrm{Out}(S_6)$?
(5) Wat is de structuur van $\mathrm{Aut}(S_6)$?
(6) Waar in de wiskunde heeft de niet-trivialiteit van $\mathrm{Out}(S_6)$ interessante gevolgen?