Epimorfismen

Een *epimorfisme van groepen* is een groepshomomorfisme $f\colon G_1 \to G_2$ met de eigenschap dat voor elke groep G_3 en elk tweetal groepshomomorfismen $g, h\colon G_2 \to G_3$ met $g \circ f = h \circ f$ geldt $g = h$. De definitie van een *epimorfisme van topologische ruimten* is bijna identiek: met moet alleen alle voorkomende groepen door topologische ruimten vervangen, en alle voorkomende groepshomomorfismen door continue afbeeldingen.

Iedere *surjectieve* afbeelding is een epimorfisme, en in elk van beide genoemde gevallen blijkt de omkering ook te gelden. Het project behelst de bestudering van dit fenomeen in verschillende contexten.

Om te beginnen zal de definitie van een “epimorfisme” zelf in de juiste algemeenheid gegeven moeten worden. Hiertoe is het voldoende te weten wat een *categorie* is. Voor elke categorie $\mathcal{C}$ kan men over *epimorfismen in* $\mathcal{C}$ spreken. Voor de categorie van groepen en de categorie van topologische ruimten vindt men dan de eerder genoemde begrippen terug.

Een paar begrippen uit de categorieënleer kunnen bij het project nuttig zijn; zo is de vraag naar de relatie tussen epimorfismen in een categorie $\mathcal{C}$ en surjecties alleen zinvol als men een zogenaamde “vergeetfunctor” van $\mathcal{C}$ naar de categorie van verzamelingen heeft.

Het zwaartepunt van het project zal echter niet in de theorie van categorieën liggen, maar in een theorie die de uitvoerder van het project tot op zekere hoogte zelf kan kiezen. Er blijkt namelijk dat het bewijs dat elk epimorfisme van groepen surjectief is, berust op groepentheorie; en dat het bewijs dat elk epimorfisme van topologische ruimten surjectief is, op topologie. Dit is karakteristiek voor de taal der categorieën, die beter is in het formuleren van goede problemen dan in het oplossen ervan; voor dat laatste moet men doorgaans teruggaan naar het vakgebied in de wiskunde waar de categorie die men bestudeert toe behoort.

Hoe zien de epimorfismen in een aantal “in de natuur voorkomende” categorieën eruit?

De student die speciale belangstelling voor topologie heeft, kan zich deze vraag stellen voor verschillende categorieën die uit topologische ruimten bestaan: *alle* topologische ruimten, zoals boven; alleen de Hausdorff-ruimten; of alleen de ruimten die aan een ander scheidingsaxioma voldoen; en men kan ook beperkingen aan de afbeeldingen opleggen.

Meer algebraïsch georiënteerde studenten kunnen kijken naar diverse categorieën van groepen: alle groepen, de eindige groepen, de abelse groepen, de oplosbare groepen, de torsievrije groepen, en combinaties hiervan. Verder kan men denken aan epimorfismen van ringen, van commutatieve ringen, en van lichamen.

Enig literatuuronderzoek is waarschijnlijk wenselijk bij het project, en het geven van een overzicht van bekende resultaten kan onderdeel van de bachelorscriptie zijn; maar er wordt gehoopt dat de student ook zelf gaat zitten nadenken en daarvan verslag doet.

Begeleider: H. W. Lenstra