VERGELIJKINGEN IN POLYNOMEN

(Begeleider: Jan-Hendrik Evertse, evertse@math.leidenuniv.nl)

Een centraal vermoeden in de getaltheorie, het zogenaamde abc-vermoeden van Oesterlé en Masser, kan als volgt worden geformuleerd. Uit de stelling over eenduidige priemontbinding volgt dat N kan worden geschreven als product van machten van priemgetallen: $N = \pm p_1^{k_1} \cdots p_t^{k_t}$, waarbij $p_1, \ldots, p_t$ verschillende priemgetallen zijn en $k_1, \ldots, k_t$ positieve getallen. Definieer het radicaal van N door $\mathrm{rad}(N) := p_1 \cdots p_t$, d.w.z. het product van de verschillende priemgetallen die N delen. Het abc-vermoeden zegt nu dat er voor elke $\varepsilon > 0$ een constante $C(\varepsilon) > 0$ bestaat met de eigenschap dat voor elk drietal gehele getallen a, b, c met $a + b + c = 0$, $abc \neq 0$, $\mathrm{ggd}(a, b, c) = 1$,

$$\max(|a|, |b|, |c|) \leq C(\varepsilon)\bigl(\mathrm{rad}(abc)\bigr)^{1+\varepsilon}.$$

Dit vermoeden heeft vérstrekkende gevolgen; bijvoorbeeld kan men allerlei generalisaties van de laatste stelling van Fermat eruit afleiden.

Het bachelorproject gaat over de 'abc-stelling' voor polynomen en generalisaties daarvan. Er bestaat een grote analogie tussen de ring van gehele getallen $\mathbf{Z}$ en polynoomringen $K[X]$ met K een lichaam, en veel uitspraken over gehele getallen kunnen worden 'vertaald' naar uitspraken over polynomen en vice-versa. Vaak zijn de uitspraken over polynomen veel eenvoudiger te bewijzen dan de corresponderende uitspraken over gehele getallen, en er zijn veel open problemen voor gehele getallen waarvan de pendanten voor polynomen al lang en breed bewezen zijn.

De 'abc-stelling voor polynomen' is een door Stothers in 1981 en onafhankelijk daarvan door Mason in 1983 bewezen stelling voor polynomen die erg lijkt op het bovengenoemde abc-vermoeden voor gehele getallen. Zij K een lichaam van karakteristiek 0. Volgens de stelling over eenduidige priemontbinding in $K[X]$ kan elk polynoom $F(X) \in K[X]$ op eenduidige manier worden geschreven als $F(X) = cP_1(X)^{k_1} \cdots P_t(X)^{k_t}$ met $c \in K^*$, $P_1(X), \ldots, P_t(X)$ verschillende irreducibele monische polynomen in $K[X]$ en $k_1, \ldots, k_t > 0$. Definieer $\mathrm{rad}(F) := P_1(X) \cdots P_t(X)$. We kunnen de graad van een polynoom vergelijken met de logaritme van de absolute waarde van een geheel getal.

ABC-STELLING VOOR POLYNOMEN. *Zijn $A(X), B(X), C(X)$ drie polynomen in $K[X]$ met*

$$A(X) + B(X) + C(X) = 0, \quad A(X)B(X)C(X) \notin K^*, \quad \mathrm{ggd}(A(X), B(X), C(X)) = 1.$$

Dan is

$$\max(\mathrm{graad}(A), \mathrm{graad}(B), \mathrm{graad}(C)) \leq \mathrm{graad}\bigl(\mathrm{rad}(ABC)\bigr) - 1.$$

Het bewijs berust op manipulaties met de afgeleiden van A, B, C. Mason bewees een generalisatie waarin A, B, C algebraïsche functies zijn, d.w.z. dat A, B, C algebraïsch zijn over het lichaam van rationale functies $K(X)$. Verder bewees Mason een versie waarin het onderliggende lichaam K karakteristiek $p > 0$ heeft.

In 1985 bewees Voloch een generalisatie van de abc-stelling voor sommen $A_1(X) + \cdots + A_n(X) = 0$, waarbij $A_1, \ldots, A_n$ algebraïsche functies zijn over een lichaam K van karakteristiek 0. In 1986 gaven

Brownawell en Masser onafhankelijk daarvan een ander bewijs. In 1998 generaliseerde Wang hun resultaten naar lichamen van willekeurige karakteristiek. Een speciaal geval van het resultaat van Brownawell/Masser is als volgt:

STELLING. *Zij* $n \geq 3$. *Zijn* $A_1(X), A_2(X), \ldots, A_n(X)$ *polynomen in* $K[X]$ *met*

$$A_1(X) + \cdots + A_n(X) = 0, \quad \prod_{i=1}^{n} A_i(X) \notin K^*, \quad \mathrm{ggd}(A_i(X), A_j(X)) = 1 \textit{ voor } 1 \leq i \neq j \leq n.$$

Dan is

$$\max(\mathrm{graad}(A_1), \ldots, \mathrm{graad}(A_n)) \leq n(n-2) + (n-2) \cdot \mathrm{graad}\big(\mathrm{rad}(A_1, \ldots, A_n)\big).$$

Het bewijs van Brownawell en Masser is voor wat betreft de hoeveelheid benodigde voorkennis eenvoudiger dan dat van Voloch, en maakt gebruik van Wronskianen van algebraïsche functies. Een eventueel bachelor-project zou eruit kunnen bestaan om het bewijs van Brownawell/Masser door te werken. Dit vereist enige kennis van algebraïsche functielichamen die de uitvoerder van het project zich eigen moet maken. Afhankelijk van hoeveel tijd dit kost zouden daarna wat toepassingen van de stelling van Brownawell/Masser en Voloch kunnen worden bekeken. Een andere optie is om naar het karakteristiek p- geval te kijken.

Literatuur:

[1] W.D. Brownawell, D.W. Masser, *Vanishing sums in function fields,* Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 100 (1986), 427-434.

[2] R.C. Mason, *Diophantine Equations over Function Fields,* London Mathematical Society Lecture Notes Series 96, Cambridge University Press, 1984.

[3] J. T-Y. Wang, *A note on wronskians and the abc theorem in function fields of prime characteristic,* Manuscripta Mathematica 98 (1999), 255-264.