LINEAIRE RECURRENTE RIJEN

(Begeleider: Jan-Hendrik Evertse, evertse@math.leidenuniv.nl)

Zij K een lichaam van karakteristiek 0. Een lineaire recurrente rij $U = (u_n)_{n\geq 0}$ in K is een rij getallen in K die gegeven wordt door een stel *beginwaarden* $u_0, \dots, u_{k-1} \in K$ en een *lineaire recurrentie*

$$u_n = c_1 u_{n-1} + c_2 u_{n-2} + \cdots + c_k u_{n-k} \quad \text{voor } n \geq k \tag{1}$$

waarbij $c_1, \dots, c_k \in K$. We noemen k de lengte van de recurrentie. De bekendste rij van dit type is de rij van Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0}$, die gegeven wordt door de beginwaarden $F_0 = 0, F_1 = 1$ en de lineaire recurrentie $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ voor $n \geq 2$.

Het *karakteristieke polynoom* van de recurrentie (1) is gegeven door

$$F_{(1)}(X) := X^k - c_1 X^{k-1} - c_2 X^{k-2} - \cdots - c_k\,.$$

Kies een algebraïsche afsluiting $\overline{K}$ van K. Zijn $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ de verschillende nulpunten van $F_{(1)}$ in $\overline{K}$. Dan is $F_{(1)}(X) = (X - \alpha_1)^{e_1} \cdots (X - \alpha_t)^{e_t}$ met $e_1, \dots, e_t > 0$.

Stelling 1. *Zij $U = (u_n)_{n\geq 0}$ een rij die aan (1) voldoet. Dan zijn er polynomen $f_i \in \overline{K}[X]$ van graad $< e_i$ $(i = 1, \dots, t)$ zodat*

$$u_n = \sum_{i=1}^{t} f_i(n)\alpha_i^n \quad \textit{voor alle } n \geq 0.$$

We zijn geïnteresseerd in het probleem of een gegeven lineaire recurrente rij U de waarde 0 eindig of oneindig vaak aanneemt, dat wil zeggen of de verzameling $Z_U := \{n \in \mathbf{Z}_{\geq 0} : u_n = 0\}$ eindig of oneindig is. Een klassieke stelling van Skolem-Mahler-Lech zegt het volgende:

Stelling 2. *Zij $U = (u_n)_{n\geq 0}$ een rij die aan (1) voldoet. Zijn $\alpha_1, \dots, \alpha_t$ de nulpunten van $F_{(1)}$ in $\overline{K}$ en veronderstel dat geen van de quotiënten α_i/α_j $(i \neq j)$ gelijk is aan een eenheidswortel. Dan is Z_U eindig.*

Deze stelling werd eerst bewezen door Skolem (1934) voor lineaire recurrente rijen met termen in $\mathbf{Q}$, later door Mahler (1935) voor lineaire recurrente rijen met algebraïsche termen en tenslotte door Lech (1953) voor lineaire recurrente rijen met termen in een willekeurig lichaam K van karakteristiek 0. De bewijzen van Skolem, Mahler en Lech berusten op p-adische getallen en p-adische machtreeksen.
Een lineaire recurrentie (1) zodat tenminste één van de quotiënten α_i/α_j van de nulpunten van $F_{(1)}$ wél een eenheidswortel is heet *gedegenereerd.* Wanneer een rij U aan een gedegenereerde recurrentie (1) voldoet dan hangt het van de beginwaarden $u_0, \dots, u_{k-1}$ af of Z_U eindig dan wel oneindig is.

Een eventueel Bachelor-project zou uit het volgende kunnen bestaan:
1) Werk het bewijs van Stelling 2 door (hiervoor moeten een aantal dingen over p-adische getallen en p-adische machtreeksen worden bestudeerd).
2) Bekijk rijen U met termen in $\mathbf{Z}$ die voldoen aan een gedegenereerde lineaire recurrentie (1) van kleine lengte (zeg 2,3,4) en onderzoek wanneer Z_U eindig of oneindig is.
3) Bekijk lineaire recurrente rijen U die voldoen aan een vaste gedegenereerde recurrentie (1) met $c_1, \dots, c_k \in \mathbf{Z}$ waarbij we de beginwaarden $u_0, \dots, u_{k-1}$ laten variëren. Onderzoek "hoeveel" beginwaarden $u_0, \dots, u_{k-1} \in \mathbf{Z}$ er zijn zodat voor de rij $U = (u_n)$ met beginwaarden $u_0, \dots, u_{k-1}$ die aan (1) voldoet de verzameling Z_U oneindig is. Preciezer gezegd, zij $A(R)$ het aantal k-tallen $(u_0, \dots, u_{k-1}) \in \mathbf{Z}^k$ met $|u_0|, \dots, |u_{k-1}| \leq R$ zodat Z_U oneindig is. Wat kan worden gezegd over $A(R)/R^k$ als $R \to \infty$?