Rationale tetraëders

Een rationale tetraëder is een tetraëder waarvan alle zes de zijden en de inhoud alle rationale getallen zijn. Het kwadraat van de inhoud is een polynomiale uitdrukking in de zes zijden. Om de inhoud rationaal te krijgen is het dus nodig om zijden te kiezen waarvoor deze uitdrukking een kwadraat is. Doordat er zo veel variabelen zijn is het niet lastig oplossingen te vinden, maar wel lastig om de verzameling van *alle* oplossingen te beschrijven.

R. Buchholz heeft tetraëders bestudeerd met hooguit drie verschillende lengtes van zijden. Er zijn tien types van drie verschillende lengtes. Een van die types is bijvoorbeeld het geval waarin alle twee overstaande zijden gelijk zijn. Noemen we deze zijden a, b en c en het volume V, dan geldt

$$72V^2 = (-a^2 + b^2 + c^2)(a^2 - b^2 + c^2)(a^2 + b^2 - c^2).$$

Rationale tetraëders corresponderen met rationale oplossingen van deze vergelijking, waarbij de zijden nog aan enkele ongelijkheden moeten voldoen om er ook daadwerkelijk een tetraëder van te kunnen maken. De vergelijking bepaalt een algebraïsch oppervlak in een gewogen projectieve ruimte, of in een gewone 3-dimensionale ruimte als we oplossingen zo schalen dat we $c = 1$ hebben. Rationale tetraëders corresponderen dan (op schaling na) met punten op dit oppervlak waarvan alle coördinaten rationaal zijn (en aan bepaalde ongelijkheden voldoen).

Van vijf van de tien types is bewezen dat er geen rationale voorbeelden zijn. Van de overige vijf types kunnen we in twee gevallen alle oplossingen parametriseren. Voor nog twee gevallen, waartoe het bovenstaande voorbeeld behoort, heeft E. Acosta bewezen dat de rationale punten dicht liggen in de Zariski topologie op het bijbehorende oppervlak. Hierbij maakt hij gebruik van elliptische vezelingen.

Voor het laatste type heeft C. Chisholm bewezen dat er oneindig veel rationale oplossingen zijn, maar het is nog niet bekend of de rationale punten ook Zariski dicht liggen op het bijbehorende oppervlak. Waarschijnlijk kunnen dezelfde technieken gebruikt worden die E. Acosta heeft toegepast.

Een bachelor project op dit gebied is niet makkelijk en vereist dat de student leert wat gewogen projectieve ruimten zijn en wat Zariski topologie betekent en zich ook de beginselen van de theorie van elliptische krommen eigen maakt. Daarna kunnen we proberen met deze technieken dit laatste geval te kraken.

Begeleider: Ronald van Luijk