Vectorbundels

Laat X een n-dimensionale differentieerbare variëteit zijn. Een vectorbundel met rang r over X is een $(n+r)$-dimensionale differentieerbare variëteit E samen met een differentieerbare afbeelding $p : E \longrightarrow X$ (de projectie) die aan de volgende eisen voldoen:
Er is een open overdekking $X = \bigcup_{i \in I} U_i$ zodat er voor elk $i \in I$ een diffeomorfisme

$$\phi_i : p^{-1}(U_i) \longrightarrow U_i \times \mathbb{R}^r$$

(lokale trivialisatie) bestaat met de volgende eigenschappen:
1. Voor alle $i \in I$ geldt $\mathrm{pr}_1 \circ \phi_i = p|_{p^{-1}(U_i)}$, waarbij $pr_1 : U_i \times \mathbb{R}^r \longrightarrow U_i$ de gewone projectie op de eerste component is. I.h.b. geldt $\phi_i(p^{-1}(x)) = \{x\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r$ voor alle $x \in U_i$.
2.Voor alle $i, j \in I$ en alle $x \in U_i \cap U_j$ is

$$g_{ji}(x) : \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \ \mathbb{R}^r \cong \phi_i(p^{-1}(x)) \longrightarrow \phi_j(p^{-1}(x)) \cong \mathbb{R}^r$$

een lineaire afbeelding; omdat de ϕ_i's diffeomorfismen zijn is deze lineaire afbeelding automatisch een isomorfisme.

Voor $x \in X$ heet $E(x) := p^{-1}(x)$ de vezel van E in x; wegens 1. en 2. heeft $E(x)$ een natuurlijke r-dimensionale vectorruimte-structuur. Intuïtief verkrijgt men de vectorbundel E door in elk punt x de vectorruimte $E(x)$ op geschikte manier vast te plakken.

Voorbeelden
1. De triviale vectorbundel is het produkt $E = X \times \mathbb{R}^r$ met projectie $p = \mathrm{pr}_1 : X \times \mathbb{R}^r \longrightarrow X$ en vezels $E(x) = \{x\} \times \mathbb{R}^r \cong \mathbb{R}^r$.
2. De Möbiusband M kan men zien als een vectorbundel met rank 1 over de eenheidscircel S^1. M is een niettriviale bundel, d.w.z. niet "isomorph" met $S^1 \times \mathbb{R}$.

3. De raakbundel TX van X: als verzameling is dit de disjunkte vereniging $TX = \coprod_{x \in X} T_x X$ van de raakruimten aan X; de projectie beeldt elke $T_x X$ af naar x, de vezel van TX in x is dus $T_x X$.
4. Stel dat X een deelvariëteit van de $\mathbb{R}^N$ is; voor $x \in X$ is de raakruimte $T_x X$ dan een lineaire deelruimte van de $\mathbb{R}^N$. De normaalbundel N_X van X is een vectorbundel over X wiens vezel $N_X(x)$ het orthogonale complement (t.o.v. het standaard inproduct) van $T_x X$ in $\mathbb{R}^N$ is. Algemener kan de normaalbundel van een deelvariëteit in een willekeurige variëteit worden gedefinieerd.
5. Laat $\mathbb{P} := \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$ de n-dimensionale projectieve ruimte zijn, d.w.z. de verzameling van lijnen door de oorsprong in $\mathbb{R}^{n+1}$. De tautologische lijnbundel over $\mathbb{P}$ is de rang 1 vectorbundel $p : \mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) \longrightarrow \mathbb{P}$ gegeven als volgt: Beschouw de triviale vectorbundel $\mathrm{pr}_1 : \mathbb{P} \times \mathbb{R}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{P}$; dan geldt

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1) = \{ \ (l, v) \in \mathbb{P} \times \mathbb{R}^{n+1} \mid v \in l \ \} \quad , \quad p := \mathrm{pr}_1|_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)} \ .$$

De vezel van $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$ in een punt $l \in \mathbb{P}$ is dan l zelf gezien als een lijn in $\mathbb{R}^{n+1}$.

Veel begrippen uit de theorie van vectorruimten (deelruimte, quotient, dualiteit, tensorprodukt etc.) kunnen worden gegeneraliseerd naar vectorbundels; bijvoorbeeld is $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$ een deelbundel van de triviale bundel $\mathbb{P} \times \mathbb{R}^{n+1}$, en het resulterende quotient is het tensorprodukt van de raakbundel $T\mathbb{P}$ en $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$.

De scriptie over vectorbundels zal bestaan uit en algemeen deel waarin grondslagen van de theorie worden samengevat, en een deel waarin in overleg met de student specifieke voorbeelden behandeld en uitspraken bewezen worden, bijvoorbeeld degene boven over het verband tussen $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$ en $T\mathbb{P}$, of het feit dat een hyperoppervlak in een georiënteerde varieteit zelf georienteerd is d.e.s.d. als zijn normaalbundel triviaal is.

Nodige voorkennis: het college Introduction to manifolds
Literatuur: zal in overleg worden uitgezocht

Begeleider: M. Lübke