De Banach-Tarski paradox

De stelling van Banach-Tarski (1924) zegt dat een massieve bol in een eindig aantal stukken kan worden opgedeeld zodanig, dat na geschikte ineenvoeging van deze stukken twee massieve bollen van hetzelfde volume als de oorspronkelijke bol ontstaan. Het doel van deze opgave is om de stelling van Banach-Tarski te bewijzen. Onderweg maken we kennis met enkele fundamentele begrippen uit de algebra, zoals het keuzeaxioma, werkingen en vrije producten. Als hulp bij deze opgave lijkt §1.3 uit het boek *The axiom of choice* van T.J. Jech zeer geschikt.
(i) Definieer op de collectie deelverzamelingen van $\mathbb{R}^3$ een equivalentierelatie 'equidecomposabiliteit', notatie $\approx$, om daarmee de volgende compacte formulering van de stelling van Banach-Tarski te geven: zij D een massieve bol. Dan zijn er $V, W \subset D$ met $D = V \sqcup W$ en $V \approx D$ en $W \approx D$.
(ii) Laat zien hoe de stelling van Banach-Tarski volgt uit het volgende resultaat van Hausdorff (1914): zij S een boloppervlak. Dan zijn er $A, B, C, Q \subset S$ met $S = A \sqcup B \sqcup C \sqcup Q$, met Q aftelbaar en met A, B, C èn $B \sqcup C$ onderling congruent.
Het volstaat nu om Hausdorffs resultaat te bewijzen. Het bewijs berust op het keuzeaxioma.
(iii) Formuleer het keuzeaxioma.
Het idee is, dat we de natuurlijke werking van de groep $SO(3)$ op S bekijken.
(iv) Vertel iets in het algemeen over de werking van een groep op een verzameling. Ga in op de definitie, op zaken als banen en fixpunten, en bewijs dat een verzameling X, voorzien van een werking van een groep G, gelijk is aan de disjuncte vereniging van zijn banen.
(v) Bewijs dat we twee assen l en m van S kunnen kiezen zodanig dat het volgende geldt. Laat φ een rotatie zijn van π om l, en laat ψ een rotatie zijn van $\frac{2}{3}\pi$ om m. Dan is de ondergroep G van $SO(3)$ voortgebracht door φ en ψ isomorf met de groep voortgebracht door twee elementen a, b met relaties $a^2 = 1$ en $b^3 = 1$.
(vi) Bewijs dat G kan worden opgedeeld in disjuncte verzamelingen $G = \mathcal{A} \sqcup \mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}$ zo dat $\varphi(\mathcal{A}) = \mathcal{B} \sqcup \mathcal{C}$; $\psi(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$ en $\psi^2(\mathcal{A}) = \mathcal{C}$.
(vii) Bewijs dat een niet-triviaal element $g \in SO(3)$ precies twee fixpunten heeft op S.
(viii) Laat zien dat het resultaat van Hausdorff uit het voorgaande volgt, door voor Q te nemen de verzameling fixpunten van niet-triviale $g \in G$, vervolgens een volledig representantensysteem M te kiezen van de werking van G op $S \setminus Q$, en dan te nemen $A = \cup_{g \in \mathcal{A}} g(M)$; $B = \cup_{g \in \mathcal{B}} g(M)$ en ten slotte $C = \cup_{g \in \mathcal{C}} g(M)$.
(ix) Zijn er in de literatuur meer 'paradoxale decomposities' te vinden die berusten op het keuzeaxioma? Kan men aangeven in *hoeveel* stukken de massieve bol kan worden opgedeeld om een paradoxale decompositie te verkrijgen?

Begeleider: R.S. de Jong