

Eindige topologische ruimten

Eindige topologische ruimten hebben meer interessante topologische eigenschappen dan je op het eerste gezicht zou denken. Bijvoorbeeld kan de fundamentealgroep van een eindige topologische ruimte isomorf zijn met de fundamentealgroep van een willekeurig (eindig) simpliciaal complex (voor deze notie zie [1], p. 121). Neem bijvoorbeeld de ruimte $\mathbb{S}^1 = \{a, b, c, d\}$ met als basis

$$\{\{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}.$$

Deze ruimte heeft de fundamentealgroep van de cirkel S^1 en is ‘minimaal’ met betrekking tot deze eigenschap.

Het verband tussen \mathbb{S}^1 en de cirkel S^1 blijkt nog nauwer te zijn. In [3] wordt bewezen dat er covariante functoren $X \mapsto \mathcal{K}(X)$ en $K \mapsto \mathcal{X}(K)$ zijn die aan elke eindige T_0 -ruimte X een eindig simpliciaal complex $\mathcal{K}(X)$ en aan elk eindig simpliciaal complex K een eindige T_0 -ruimte $\mathcal{X}(K)$ toevoegen. Deze functoren veranderen de fundamentealgroep niet. Als K een eindig simpliciaal complex is dan is $K' = \mathcal{K}(\mathcal{X}(K))$ de eerste barycentrische onderverdeling van K (zie [1], p. 125). Voor $X = \mathbb{S}^1$ krijgen we $|\mathcal{K}(X)| \cong S^1$.

Probeer $X \mapsto \mathcal{K}(X)$ en $K \mapsto \mathcal{X}(K)$ te begrijpen. Probeer eindige modellen van bijvoorbeeld een eindige graaf of de n -sfeer te construeren. Hoe kunnen we dat zo ‘zuinig’ mogelijk doen (zie [2])? Probeer na te gaan hoe bijvoorbeeld (universele) overdekkingsruimten samenhangen via $X \mapsto \mathcal{K}(X)$ en $K \mapsto \mathcal{X}(K)$ - zijn hier ‘equivalenties van categorieën’ te verwachten?

Literatuur

- [1] M.A. Armstrong, *Basic topology*. Springer UTM 1983.
- [2] J.A. Barmak, E.G. Minian, *Minimal finite models*. Preprint [arXiv:math/0611156](https://arxiv.org/abs/math/0611156).
- [3] M.C. McCord, *Singular homology groups and homotopy groups of finite topological spaces*. Duke Math. J. 33 (1966), 465–474.

Begeleider: R.S. de Jong.