Projectieve vlakken (begeleider: R.S. de Jong)

Een verzameling P tezamen met een collectie $\mathcal{L}$ van deelverzamelingen van P heet een *projectief vlak* als:

- voor verschillende $x, y \in P$ is er precies één $L \in \mathcal{L}$ zodat $\{x, y\} \subset L$;
- voor verschillende $L_1, L_2 \in \mathcal{L}$ bestaat $L_1 \cap L_2$ uit precies één element;
- er bestaat een deelverzameling G van P bestaande uit 4 elementen zodat $\#(G \cap L) \leq 2$ voor elke $L \in \mathcal{L}$.

De elementen van P noemen we *punten*, de elementen van $\mathcal{L}$ *lijnen*. Als bekend voorbeeld geldt het reële projectieve vlak

$$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \sqcup \mathbb{R} \sqcup \{\infty\}$$

met de gebruikelijke notie van lijnen; de constructie kan worden veralgemeend naar elk willekeurig lichaam k, leidend tot het projectieve vlak $\mathbb{P}^2(k)$ over k.

Van bijzonder belang in de combinatoriek zijn de *eindige* projectieve vlakken. Zij P zo'n eindig projectief vlak. Er blijkt een natuurlijk getal q te zijn zodat:

- elke lijn bevat precies $q + 1$ punten;
- door elk punt gaan precies $q + 1$ lijnen;
- er zijn precies $q^2 + q + 1$ punten in P;
- er zijn precies $q^2 + q + 1$ lijnen in $\mathcal{L}$.

We noemen het (duidelijk uniek vastgelegde) getal q de *orde* van P. Voor elke priemmacht q geeft $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$ een projectief vlak van orde q. Voor $q = 2, 3, 4, 5, 7, 8$ zijn alle eindige projectieve vlakken van orde q ook isomorf met $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_q)$, maar naast $\mathbb{P}^2(\mathbb{F}_9)$ blijken er nog drie andere isomorfietypes van projectieve vlakken van orde 9 te bestaan. Er bestaan geen projectieve vlakken van orde $q = 6, 10$. Vermoed wordt dat de orde van een eindig projectief vlak altijd een priemmacht is.

Men kan met een gegeven projectief vlak een algebraïsche structuur associëren, een zogenaamde *vlakke ternaire ring*. Voor $\mathbb{P}^2(k)$ krijgen we op deze manier het lichaam k terug. Maar ook meer algemene *delingsringen* en zelfs *bijna-lichamen* (zie een bachelorproject van Prof. Lenstra) komen voor. Ruwweg gezegd, als we voor een projectief vlak P te maken hebben met een lichaam, dan geldt de zgn. "Stelling van Pappos", hebben we te maken met een delingsring, dan geldt de zgn. "Stelling van Desargues". Als Pappos geldt, dan geldt dus ook Desargues, maar niet noodzakelijk omgekeerd; het omgekeerde geldt wel, merkwaardig genoeg, voor *eindige* projectieve vlakken—volgens de Stelling van Wedderburn is namelijk elke eindige delingsring een lichaam.

Doel van dit bachelorproject is een verslag te schrijven over deze algebraïsche structuren geassocieerd met projectieve vlakken. Een aantal voorbeelden kan concreet worden uitgewerkt.

Literatuursuggestie

M. Hall jr., *Combinatorial theory.* Blaisdell Publishing Company, 1967.