De Brauergroep van een lichaam

De Brauergroep van een lichaam k is een abelse groep $\mathrm{Br}\,k$ die *centrale simpele algebra's* over k classificeert. De definities van deze termen staan beneden. Het project bestaat er om te beginnen uit de fundamentele stellingen over centrale simpele algebra's uit te werken die de definitie van $\mathrm{Br}\,k$ rechtvaardigen. De verdere inhoud van het project zal in overleg met de student worden vastgesteld. Er kan een selectie uit de volgende onderwerpen gemaakt worden: verdere belangrijke stellingen over centrale simpele algebra's; voorbeelden van Brauergroepen; $\mathrm{Br}\,k$ als functor van k; het verband van Brauergroepen met Galoiscohomologie; en de theorie van Azumaya-algebra's, waarin de rol van het grondlichaam k wordt overgenomen door een willekeurige commutatieve ring.

Het *centrum* $Z(A)$ van een ring A is gedefinieerd door $Z(A) = \{a \in A :$ voor elke $b \in A$ geldt $ab = ba\}$; dit is een deelring van A. Een ring A heet *simpel* (of *enkelvoudig*) als het aantal tweezijdige idealen van A gelijk is aan 2.

Zij k een commutatieve ring. Een k*-algebra* of *algebra over* k is een paar bestaande uit een ring A en een ringhomomorfisme $k \to Z(A)$; meestal refereert men gewoon aan A als de k-algebra, waarbij men het ringhomomorfisme in gedachten houdt. Een k-algebra A heet *centraal* als het ringhomomorfisme $k \to Z(A)$ een *isomorfisme* is. Als k een lichaam is, dan is een *centrale simpele* k*-algebra* een k-algebra die centraal is, als ring simpel is, en bovendien voldoet aan $\dim_k A < \infty$.

Voorbeelden. Voor elke commutatieve ring k en elk positief geheel getal n is de ring $M_n(k)$ van $n \times n$-matrices over k, voorzien van het ringhomomorfisme $k \to Z(M_n(k))$ dat elke $c \in k$ op c maal de identiteitsmatrix afbeeldt, een centrale k-algebra; bovendien geldt dat $M_n(k)$ simpel is dan en slechts dan als k een lichaam is. Met $n = 1$ ziet men dat elk lichaam k zelf een centrale simpele k-algebra is. De delingsring $\mathbf{H}$ der quaternionen is een centrale simpele $\mathbf{R}$-algebra.

Voor elk tweetal algebra's A en B over een commutatieve ring k kan men het *tensorproduct* $A \otimes_k B$ definiëren, dat eveneens een k-algebra is. Bovendien, als k een lichaam is en A en B zijn centrale simpele k-algebra's, dan is $A \otimes_k B$ dat ook.

Zij k nu een lichaam. De Brauergroep $\mathrm{Br}\,k$ van k heeft als elementen de *equivalentieklassen* van centrale simpele k-algebra's, waarbij A en B *equivalent* heten als er positieve gehele getallen n, m zijn waarvoor $M_n(A)$ als k-algebra isomorf is met $M_m(B)$. De vermenigvuldiging komt van het tensorproduct, het eenheidselement is de klasse van k zelf, en de inverse komt van de zogenaamde *tegengestelde* algebra. Elke equivalentieklasse bevat precies één *delingsring*, dus men kan $\mathrm{Br}\,k$ ook definiëren als de verzameling k-isomorfieklassen van delingsringen D met $Z(D) = k$ en $\dim_k D < \infty$.

De theorie van Brauergroepen stamt uit de jaren dertig en is in vele fundamentele leer- en handboeken te vinden, zoals Van der Waerden's *Algebra* en N. Bourbaki's *Algèbre*. De student wordt aangeraden zelf ook literatuur op te zoeken, en in J.-P. Serre's *Corps locaux* (ook vertaald in het Engels) te kijken.

Begeleider: H. W. Lenstra