Bijna-lichamen

De definitie van een *bijna-lichaam* (Engels: *near-field*, Duits: *Fastkörper*; is er een betere Nederlandse benaming? is het waar dat men in Vlaanderen *schierveld* zegt?) krijgt men door in de definitie van *delingsring* (ook wel *scheeflichaam* genoemd) de distributieve wet $(a+b)\circ c = (a\circ c)+(b\circ c)$ door de zwakkere eis $0\circ c = 0$ te vervangen, maar de andere distributieve wet te behouden. Met andere woorden, een bijna-lichaam is een additief genoteerde abelse groep F met een extra operatie $\circ$ die de volgende eigenschappen heeft: $F\backslash\{0\}$ is een groep met de bewerking $\circ$; en voor alle a, b, $c \in F$ geldt $a \circ (b + c) = (a \circ b) + (a \circ c)$; voor alle $c \in F$ geldt $0 \circ c = c$. *Waarschuwing*: men komt variaties op deze definitie tegen; soms wordt bijvoorbeeld juist de *andere* distributieve wet vervangen.

Delingsringen zijn voorbeelden van bijna-lichamen. Een andere klasse voorbeelden krijgt men door voor F een lichaam te nemen, een groepshomomorfisme $\rho\colon F^* \to \operatorname{Aut} F$ te kiezen met de eigenschap dat voor alle σ in het beeld van ρ geldt $\rho\sigma = \rho$, en te definiëren $a \circ b = a \circ \rho(a)(b)$ (voor $a \neq 0$). Voorbeeld: neem $F = \mathbf{Q}(i)$, en laat $\rho(a)$ voor $a \in F^*$ gelijk zijn aan de identiteit of complexe conjugatie al naar gelang het aantal factoren 2 in het rationale getal $a\bar{a}$ even of oneven is.

Bijna-lichamen komen voor in de 'meetkundige algebra', zie het boek *Translation planes* door H. Lüneburg (Springer-Verlag, 1980). In deze context zijn de *eindige* bijna-lichamen het belangrijkst. Die komt men ook in de *groepentheorie* tegen, bij het classificeren van eindige groepen die *scherp tweevoudig transitief* op een verzameling werken. De eindige bijna-lichamen zijn geclassificeerd door H. Zassenhaus (*Über endliche Fastkörper*, Abh. Math. Sem. Hamburg **11** (1936), 187–220).

Hier is een lijst kwesties waarvan men een aantal in een scriptie over bijna-lichamen kan behandelen.

(1) Wat hebben bijna-lichamen precies met meetkundige algebra en met scherp tweevoudig transitieve groepswerkingen te maken?

(2) Zijn er andere toepassingen van bijna-lichamen?

(3) Men zegt dat de commutativiteit van de optelling in een bijna-lichaam uit de overige axioma's kan worden afgeleid. Hoe gaat dat? Stel dat $1 \in F\backslash\{0\}$ het eenheidselement voor $\circ$ aangeeft. Geldt voor alle a in een bijna-lichaam $(1 + 1) \circ a = a + a$? En $(-1) \circ a = -a$? Hebben bijna-lichamen ook een *karakteristiek* en een *priem-bijna-lichaam*?

(4) Wat voor andere constructies van bijna-lichamen zijn er?

(5) Hoe luiden de voornaamste stellingen uit de theorie der bijna-lichamen? Waar berusten de bewijzen op? Is er veel literatuur over?

(6) Hoe ziet de classificatie van Zassenhaus er uit? Hoeveel bijna-lichamen zijn er die een gegeven eindig aantal elementen hebben, op isomorfie na? Is er een eenvoudig bewijs van de stelling van Zassenhaus bekend?

(7) Kan men, voortbouwend op Zassenhaus' werk, ook alle *homomorfismen* tussen eindige bijna-lichamen bepalen, in het bijzonder al hun *automorfismengroepen*? Kan men de *categorie* van eindige bijna-lichamen op een aantrekkelijke manier beschrijven?

Begeleider: H. W. Lenstra.