TRANSCENDENTE GETALLEN

(Begeleider: Jan-Hendrik Evertse, evertse@math.leidenuniv.nl)

Een complex getal α heet algebraïsch als er een polynoom $f \in \mathbf{Q}[X] \setminus \{0\}$ bestaat zo dat $f(\alpha) = 0$. Wanneer α niet algebraïsch is heet α *transcendent.* Het is niet moeilijk te bewijzen dat er hoogstens aftelbaar veel algebraïsche getallen in $\mathbf{C}$ zijn; dus er zijn zeker transcendente getallen. Het doel van het bachelorproject is om de bewijzen van een aantal transcendentieresultaten door te werken en daar een scriptie over te schrijven.

In 1873 bewees Hermite dat e transcendent is. In 1883 bewees Lindemann onder meer dat voor elk algebraïsch getal $\alpha \neq 0$, e^{α} transcendent is. Hieruit volgt onder meer dat π transcendent is. Namelijk als π algebraïsch is dan is πi dat ook. Maar $e^{\pi i} = -1$ is algebraïsch, tegenspraak. Een meer algemeen resultaat van Lindemann zegt het volgende: zijn $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ algebraïsche getallen die lineair onafhankelijk over $\mathbf{Z}$ zijn, dat wil zeggen dat er geen niet-triviale lineaire combinatie van $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ met coëfficiënten in $\mathbf{Q}$ gelijk is aan 0. Dan geldt voor alle algebraïsche getallen $\beta_1, \ldots, \beta_n$ ongelijk aan 0 dat $\beta_1 e^{\alpha_1} + \cdots + \beta_n e^{\alpha_n} \neq 0$. Een onderdeel van het project zou kunnen zijn om het bewijs door te werken dat e^{α} transcendent is voor algebraïsche getallen $\alpha \neq 0$, of om het bewijs van de meer algemene stelling van Lindemann door te werken.

Een machtreeks $f(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_n z^n$ met coefficienten $a_n \in \mathbf{Q}$ heet algebraïsch er een polynoom $P(X, Y) \in \mathbf{Q}[X, Y] \setminus \{0\}$ bestaat zodat $P(z, f(z)) \not\equiv 0$; anders heet de machtreeks transcendent. Bijvoorbeeld $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} z^n/n!$ is transcendent. Een voor de hand liggende (en vaak moeilijke) vraag is of voor een transcendente machtreeks $f(z)$ en voor algebraï sche getallen $\alpha \neq 0$ binnen het convergentiegebied van f geldt dat $f(\alpha)$ transcendent is. Dit geldt bijvoorbeeld voor $f(z) = e^z$. Liouville bewees (min of meer) in 1844 dat dit geldt voor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{n!}$. Mahler bewees in 1929 dat dit geldt voor $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^{d^n}$ waarbij d een geheel getal ≥ 2 is. Dus de decimale breuk met enen op de eerste, tiende, honderdste,... plaats en verder nullen is transcendent. Een mogelijkheid is om de bewijzen van Liouville en Mahler door te werken, en eventueel naar generalisaties van hun resultaten te kijken.