DE CAMPBELL-HAUSDORFFFORMULE

BEGELEIDER: LENNY TAELMAN

De *exponentiële functie* is een groepshomomorfisme van $\mathbf{C}$ naar $\mathbf{C}^\times$: als x en y complexe getallen zijn dan geldt

$$\exp(x+y) = (\exp x)(\exp y).$$

Men kan ook $\exp x$ definiëren voor een complexe n bij n matrix x door middel van de gebruikelijke reeksontwikkeling

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

waarbij de machten van x nu gedefinieerd zijn door *matrixvermenigvuldiging*. Als $n > 1$ dan geldt in het algemeen *niet* dat $\exp(x+y) = \exp(x)\exp(y)$ voor n bij n matrices x en y. Er geldt

$$(\exp x)(\exp y) = \exp z$$

voor een matrix z die kan uitgedrukt worden in x en y door middel van de *Campbell-Hausdorffformule*. Dit is een oneindige reeks waarvan de eerste termen er als volgt uitzien:

$$z = (x+y) + \frac{1}{2}[x,y] + \frac{1}{12}\left([x,[x,y]] - [y,[x,y]]\right) + \cdots \tag{1}$$

Hier is $[a,b]$ een verkorte notatie voor de *commutator* $ab - ba$.

De formule legt een verband tussen een groepsoperatie (matrixvermenigvuldiging), en de commutatoroperatie. In het algemeen legt hij een verband tussen bepaalde *groepen* en *Lie algebra's*.

Als nu x en y geen complexe matrices zijn maar matrices met coëfficiënten in een willekeurig *lichaam*, dan heeft de formule voor z geen betekenis meer, want we kunnen niet langer spreken van convergentie van reeksen, en als het lichaam niet karakteristiek nul heeft dan kunnen we misschien niet door 2 of 12 of . . . delen.

Doch zijn er speciale gevallen waarin de formule (1) nog steeds betekenis heeft. Bijvoorbeeld als x en y *commuteren*, want dan zijn alle termen behalve $x+y$ gelijk aan 0.

Een subtieler geval waarin de formule nog betekenis heeft is als volgt. Wanneer x en y *bovendriehoeksmatrices* zijn (met nullen op de diagonaal), dan zijn alle termen van "graad" $\geq n$ gelijk aan 0 en wordt de oneindige som in (1) een eindige som. Als bovendien ook nog de coëfficiënten in die eindige som betekenis hebben (als men in het lichaam kan delen door 2 en door 12 en door . . .) dan is de formule niet alleen betekenisvol, maar vaak ook erg nuttig. Het is bijvoorbeeld op deze manier mogelijk om bepaalde eindige groepen te bestuderen door middel van Lie algebras.

Mogelijke vragen waar in een bachelorscriptie naar gekeken kan worden zijn:

- Hoe kan men bewijzen dat een formule als (1) met de juiste eigenschappen bestaat, en is die formule uniek?
- Wat zijn de noemers die in de formule voorkomen?

- Wat zijn de precieze voorwaarde op n en het lichaam K opdat de formule (1) "betekenis heeft" voor n bij n bovendriekhoeksmatrices met coëfficiënten in K, en wat zegt de formule in dat geval over matrixvermenigvuldiging van bovendriehoeksmatrices?

Centraal in dit onderwerp is het begrip van een *Lie algebra*, en een belangrijk deel van het project zal bestaan uit het leren van de basistheorie van de Lie algebra's.