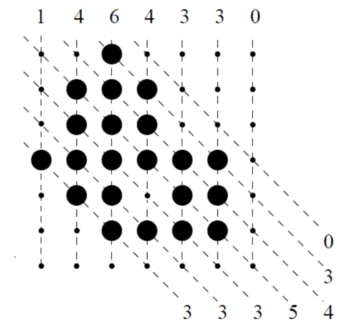
Discrete Tomografie op een torus

Eén van de aandachtsgebieden in de *discrete tomografie* is het reconstrueren van roosterbeelden uit een eindig aantal projecties, waarbij elk van de projecties bestaat uit de lijnsommen van het beeld voor alle lijnen in een bepaalde richting.

Zij n een geheel getal groter dan 0, $A = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^2 : 0 \leq x < n, 0 \leq y < n\}$ en $f : A \to \mathbb{Z}$ een *beeld* op A (denk hierbij aan een *plaatje*), dat aan elk roosterpunt in A een waarde uit $\mathbb{Z}$ toekent. We richten ons hier vooral op *binaire* beelden, waarin elk roosterpunt een waarde 0 of 1 aanneemt.

Zij $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ copriem, met $a \geq 0$. We noemen zo'n paar (a, b) een *richting*. Definieer de *projectie* $p_{(a,b)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ als volgt:

$$p_{(a,b)}(t) = \sum_{ay=bx+t} f(x, y),$$



waarbij we stellen dat $f(x, y) = 0$ als $(x, y) \notin A$. We gaan nu uit van een gegeven verzameling $D = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_d, b_d)\}$ van paarsgewijs verschillende richtingen waarvoor de projecties gegeven zijn, maar de bijbehorende beelden niet bekend zijn. Dit leidt tot verschillende problemen, zoals consistentie (is er een beeld met de gegeven projecties?), uniciteit (is de oplossing uniek?) en reconstructie (bestaat er een efficiënt algoritme dat één, of alle oplossingen vindt?).

In dit project gaan we onderzoeken hoe een aantal bekende resultaten voor reconstructieproblemen op een vierkant gebied A veranderen, of juist behouden blijven, wanneer we respectievelijk de linker- en rechterzijde van A en de boven- en onderzijde van A met elkaar verbinden en lijnen derhalve doorlopen aan de randen van A.

Dit leidt tot de volgende uitdrukking voor de *torus-projectie* $\bar{p}_{(a,b)} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$:

$$\bar{p}_{(a,b)}(t) = \sum_{ay \equiv bx+t \pmod{n}} f(x, y)$$

Interessante onderwerpen om te onderzoeken zijn onder andere:

- **Switching components.** Dit zijn roosterbeelden over $\mathbb{Z}$ die in de gegeven richtingen projectie 0 hebben. Switching components die slechts de waarden 0, 1 en -1 bevatten, kunnen bij geschikte binaire beelden worden opgeteld om andere beelden te construeren met dezelfde projecties.
- **Foutgrenzen.** Dit zijn bovengrenzen op het verschil tussen twee beelden met dezelfde projecties in de gegeven richtingen.
- **Complexiteit.** Voor het standaard vierkant rooster zijn enkele belangrijke deelproblemen (reconstructie, uniciteit, consistentie) in polynomiale tijd oplosbaar als er twee richtingen gegeven zijn, maar NP-hard voor elke verzameling van tenminste drie onafhankelijke richtingen.

Elementaire voorkennis van Combinatoriek, Getaltheorie en Algebra is voor dit project voldoende. De eerste fase van het project zal bestaan uit een literatuurstudie om bekend te raken met bestaande resultaten uit de Discrete Tomografie.

Referenties

[1] Hajdu, L., Tijdeman, R.: Algebraic Aspects of Discrete Tomography. J. reine angew. Math. **534** (2001) 119-128.

[2] Herman, G.T., Kuba, A., eds.: Discrete Tomography and its Applications. Birkhäuser, Boston (1999)

[3] Herman, G.T., Kuba, A., eds.: Advances in Discrete Tomography and Its Applications. Birkhäuser, Boston (2007)

[4] Gardner, R., Gritzmann, P., Prangenberg, D.: On the Computational Complexity of Reconstructing Lattice Sets from their X-Rays. Discrete Math. **202** (1999) 45–71