De graad van lichaamsuitbreidingen

We noemen een lichaamsuitbreiding $K' \subset L'$ een *basisuitbreiding* van een lichaamsuitbreiding $K \subset L$ als er een lichaamshomomorfisme $\psi: L \to L'$ bestaat met $\psi(K) \subset K'$ zodanig dat voor elke basis B van L als vectorruimte over K het beeld $\psi(B)$ een basis van L' als vectorruimte over K' is. (Wie weet wat tensorproducten zijn, kan deze laatste eis ook uitdrukken door te zeggen dat de natuurlijke afbeelding $L \otimes_K K' \to L'$ een isomorfisme is.)

Laat p een priemgetal of 0 zijn, en zij $\mathcal{E}_p$ de collectie van alle paren (K, L), waar K een lichaam van karakteristiek p is en L een eindige lichaamsuitbreiding van K is. Zij A een multiplicatief geschreven abelse groep. Onder een *graad* met waarden in A verstaan we een afbeelding $\mathcal{E}_p \to A$, $(K, L) \mapsto d(L/K)$, zodanig dat geldt: (i) als $(K, L) \in \mathcal{E}_p$ en $(L, M) \in \mathcal{E}_p$, dan $d(M/K) = d(M/L) \cdot d(L/K)$, en (ii) als $(K, L) \in \mathcal{E}_p$ en (K', L') is een basisuitbreiding van (K, L), dan $d(L'/K') = d(L/K)$.

Voorbeeld. Neemt men voor A de multiplicatieve groep $\mathbf{Q}_{>0}$ bestaande uit alle positieve rationale getallen, dan is de gebruikelijke graad $d(L/K) = [L : K]$ een graad met waarden in A. Hetzelfde geldt voor de separabiliteitsgraad $[L : K]_{\mathrm{s}}$ en voor de inseparabiliteitsgraad $[L : K]_{\mathrm{i}} = [L : K]/[L : K]_{\mathrm{s}}$.

Een graad $d: \mathcal{E}_p \to A$ heet *universeel* als voor elke abelse groep B en elke graad $e: \mathcal{E}_p \to B$ met waarden in B er een uniek groepshomomorfisme $f: A \to B$ is zodanig dat $e = f \circ d$.

Er is een eenvoudig "categorisch" argument dat aantoont: als $d: \mathcal{E}_p \to A$ en $d': \mathcal{E}_p \to A'$ allebei universele graden zijn, dan is er een uniek groeps*isomorfisme* $h: A \to A'$ met $d' = h \circ d$. Met andere woorden: als een universele graad bestaat, dan is deze in essentie uniek. Maar als men met algemene argumenten probeert aan te tonen dat er voor elke p inderdaad een universele graad *bestaat*, dan loopt men tegen een verzamelingstheoretisch probleem aan: de te construeren groep A kan "te groot" zijn om binnen de verzamelingenleer te passen.

Toch wijst alles erop dat er voor elke p een universele graad bestaat, en dat men hem concreet op kan schrijven. Het vermoeden is namelijk dat in het geval $p = 0$ de gebruikelijke graad $d(L/K) = [L : K]$, met $A = \mathbf{Q}_{>0}$, universeel is, en dat men voor $p > 0$ een universele graad krijgt door $A = \mathbf{Q}_{>0} \times p^{\mathbf{Z}}$ te nemen, met $p^{\mathbf{Z}} = \{p^n : n \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{Q}_{>0}$, en $d(L/K) = ([L : K], [L : K]_{\mathrm{i}})$.

Het doel van het project is om dit vermoeden te bewijzen. De te gebruiken gereedschappen komen uit de lichaamstheorie, inclusief Galoistheorie.

Als er tijd over is, kan de student ook naar een algemener soort graad kijken, waarin de voorwaarde (ii) in de bovengegeven definitie is afgezwakt. Deze algemenere graad heeft toepassingen op de studie van de groep $\mathrm{Aut}_k K$, waarbij k een lichaam is en K een algebraïsch afgesloten lichaamsuitbreiding van eindige positieve transcendentiegraad over k is.

Begeleider: H. W. Lenstra