bachelorproject

Elliptische krommen met hoge rang

Ronald van Luijk

Een *elliptische kromme* over een lichaam k is een gladde kromme E gegeven door een vergelijking van de vorm

$$y^2 = x^3 + ax^2 + bx + c$$

met $a, b, c \in k$. Het is beter deze kromme in het *projectieve vlak* $\mathbb{P}$ te beschouwen, waarin er nog een extra punt $\mathcal{O}$ op de kromme ligt, namelijk het punt op oneindig waar elke verticale lijn doorheen gaat.

Het bijzondere is dat er op een natuurlijke manier een commutatieve groepsstructuur gelegd kan worden op de verzameling $E(k)$ van k-rationale punten, waarbij $\mathcal{O}$ het nulelement is. De groepsoperatie wordt vastgelegd door de eigenschap dat drie punten P, Q en R optellen tot $\mathcal{O}$ dan en slechts dan als ze collineair zijn.

Mordell bewees in 1922 dat voor een elliptische kromme E over $\mathbb{Q}$, de abelse groep $E(\mathbb{Q})$ eindig voortgebracht is. Weil generaliseerde dit later en de groep $E(\mathbb{Q})$ staat tegenwoordig bekend als de Mordel–Weil groep van E over $\mathbb{Q}$.

Dit betekent dat de groep $E(\mathbb{Q})$ isomorf is met een product $T \times \mathbb{Z}^r$, waarbij T een eindige groep is en r een niet-negatief geheel getal dat we de *rang* of *Mordell–Weil rang* van E over $\mathbb{Q}$ noemen.

Het is niet bekend of de rang van elliptische krommen uniform begrensd is en het is dan ook een veel beoefende sport om elliptische krommen van zo hoog mogelijke rang te vinden. Het huidige record is van Noam Elkies, die in 2006 een elliptische kromme heeft gevonden waarvan de rang minstens 28 is.

In dit project zullen we enkele technieken zien om elliptische krommen met hoge rang te construeren. Hierbij kunnen we gebruik maken van het feit dat de rang volgens het Birch–Swinnerton-Dyer vermoeden gerelateerd is aan het aantal punten op de reductie van de elliptische kromme over een eindig lichaam. Dit vermoeden is een van de millenniumproblemen waar de Clay Foundation een miljoen dollar voor heeft uitgeloofd.