De Krull-dimensie

Het begrip Krull-dimensie speelt een belangrijke rol in de commutatieve algebra. Stel R is een commutatieve ring. Een *keten priemidealen* in R is een verzameling V van priemidealen van R die totaal geordend is door inclusie; als V bovendien eindig is, heet $\#V - 1$ de *lengte* van zo'n keten. Als er een geheel getal $m \geq -1$ is zodat elke dergelijke keten lengte ten hoogste m heeft, dan heet de kleinste dergelijke m de *Krull-dimensie* of kortweg de *dimensie* van R, notatie: $\dim R$. Als zo'n m niet bestaat, dan zet men $\dim R = \infty$.

Voorbeeld: $\dim R = -1$ dan en slechts dan als R de nulring is; als R een lichaam is, dan geldt $\dim R = 0$; en $\dim \mathbf{Z} = 1$.

Informatie over de Krull-dimensie is in vele boeken over commutatieve algebra te vinden, zoals *Introduction to commutative algebra* door M. F. Atiyah en I. G. Macdonald. Een betrekkelijk subtiele stelling zegt dat $\dim R$ eindig is als R locaal en noethers is. (Locaal betekent: $R \backslash R^*$ is een ideaal van R; en noethers betekent: elk ideaal van R is eindig voortgebracht.) Een andere lastige stelling luidt: als R noethers is en $\dim R < \infty$, dan geldt $\dim R[X] = 1 + \dim R$.

Zeer onlangs is er een nieuwe definitie van de Krull-dimensie gegeven, rechtstreeks in termen van elementen en zonder verwijzing naar priemidealen. Volgens deze definitie is $\dim R$ het kleinste gehele getal $m \geq -1$ met de eigenschap dat er voor elk $m+1$-tal elementen $x_0, \ldots, x_m$ van R een $m+1$-tal elementen $a_0, \ldots, a_m$ van R alsmede een $m+1$-tal natuurlijke getallen $n_0, \ldots, n_m$ bestaat zodanig dat

$$x_0^{n_0}(x_1^{n_1} \cdots (x_m^{n_m}(1 + a_m x_m) + \cdots + a_1 x_1) + a_0 x_0) = 0.$$

Het project bestaat eruit een overzicht van deze nieuwe ontwikkeling te geven. Waarom zijn beide definities equivalent? Maakt het in de nieuwe definitie uit of men 0 al dan niet tot de natuurlijke getallen rekent? Wat zijn de voordelen van de nieuwe definitie? Is er voor bovengenoemde stellingen nu een eenvoudiger bewijs voorhanden?

Literatuuronderzoek zal een belangrijk onderdeel van het project uitmaken. Over de nieuwe definitie kan men literatuur vinden door naar artikelen van T. Coquand te zoeken.

Begeleider: H. W. Lenstra.