Het probleem van Lehmer

Begeleider: Jan-Hendrik Evertse

Er zijn verschillende manieren om de 'grootte' van een algebraïsch getal te definiëren. Dit bachelor-project gaat over de zogenaamde 'Mahler-maat' van een algebraïsch getal.

Het minimumpolynoom van een algebraïsch getal α is het polynoom $F_\alpha = a_0X^d + a_1X^{d-1} + \cdots a_0 \in \mathbb{Z}[X]$ van minimale graad dat α als nulpunt heeft, en waarvoor $a_0 > 0$ en $\mathrm{ggd}(a_0, \dots, a_d) = 1$. We kunnen F_α ontbinden als

$$F_\alpha = a_0(X - \alpha^{(1)}) \cdots (X - \alpha^{(d)}),$$

waarbij $\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(d)} \in \mathbb{C}$ de geconjugeerden zijn van α. We definiëren nu de Mahler-maat van α door

$$M(\alpha) := a_0 \prod_{i=1}^{d} \max(1, |\alpha^{(i)}|).$$

Voorbeeld 1): een rationaal getal a/b met $a, b \in \mathbb{Z}$ en $\mathrm{ggd}(a, b) = 1$, $b > 0$ heeft minimumpolynoom $bX - a$ en Mahler-maat $M(a/b) := b \max(1, |a/b|) = \max(|a|, b)$.
2) $(3 + \sqrt{2})/5$ heeft minimumpolynoom $25X^2 - 30X + 7$ en Mahler-maat

$$25 \max\left(1, \frac{3+\sqrt{2}}{5}\right)\left(1, \frac{3-\sqrt{2}}{5}\right) = 25.$$

Verder geldt dat $M(\alpha) = 1$ dan en slechts dat als $\alpha = 0$ of als α een eenheidswortel is.

In 1933 stelde Lehmer de vraag hoe klein $M(\alpha)$ kan worden als α niet gelijk is aan 0 of aan een eenheidswortel. De getallen α met kleinste Mahler-maat die hij kon vinden waren de nulpunten van $X^{10} + X^9 - X^7 - X^6 - X^5 - X^4 - X^3 + X + 1$. Deze getallen hebben Mahler-maat $\approx 1,17628\dots$.

Sindsdien heeft niemand algebraïsche getallen ($\neq 0$, eenheidswortels) gevonden met kleinere Mahler-maat, en niemand gelooft nu dat die er zijn. Maar het is nog niet duidelijk hoe dat zou moeten worden bewezen. Een zwakker onbewezen vermoeden is, dat er een constante $c > 1$ bestaat zodat $M(\alpha) \geq c$ voor elk algebraïsch getal α dat niet gelijk is aan 0 of aan een eenheidswortel.

Dit vermoeden werd in 1971 bewezen door Smyth voor zogenaamde niet-reciproke algebraïsche getallen, dat zijn getallen α die niet geconjugeerd zijn met α^{-1}. Verder werd het vermoeden in 2007 bewezen door Borwein, Dobrowolski en Mossinghoff voor algebraïsche getallen waarvan alle coëfficiënten van het minimumpolynoom oneven zijn.

In 1979 bewees Dobrowolski dat er een constante $c > 0$ bestaat zodat voor elk algebraïsch getal α van graad $d \geq 3$,

$$M(\alpha) \geq 1 + c \left(\frac{\log \log d}{\log d} \right)^3 .$$

Dus deze ondergrens hangt van d af, en we zouden graag een ondergrens onafhankelijk van d willen hebben.

Een bachelor-project zou er uit kunnen bestaan om een of meer van de bewijzen van bovenstaande resultaten te bestuderen. De benodigde voorkennis is wat je tijdens de algebra-colleges 1,2 en 3 hebt geleerd.

C. Smyth, *The Mahler measure of algebraic numbers: a survey*, in: Number Theory and Polynomials, London Math. Soc. Lecture Notes Series **352**, J. McKee, C. Smyth, eds., Cambridge University Press, 2008.
Zie ook `http://www.maths.ed.ac.uk/~chris/Smyth240707.pdf`