

Een nieuw algoritme voor Lineaire Optimalisering

Lineaire optimalisering $\max\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0\}$ kan worden gezien als de “motor” van optimalisering. Veel problemen kunnen worden geformuleerd als lineaire optimaliseringsproblemen, maar bijna nog belangrijker, ze vormen relaxaties van veel andere moeilijker problemen zoals geheeltalige lineaire optimalisering $\max\{cx \mid Ax \leq b, x \geq 0, x \in \mathbb{Z}^n\}$. Deze relaxaties zijn snel oplosbaar en geven vaak zeer nuttige informatie.

Lineaire optimaliseringsproblemen worden voornamelijk opgelost door een van de talloze varianten van de *Simplexmethode*, ontwikkeld door Dantzig [3] in 1949. Tot nu toe heeft niemand een polynomiale variant van Simplex kunnen ontwikkelen. Het was lang een open probleem of er überhaupt een polynomiale algoritme voor lineaire optimalisering bestaat. Deze vraag werd in 1979 met ‘ja’ beantwoord toen Khachiyan [5] het ellipsoïde-algoritme presenteerde (zie ook Shor en Nemirovski & Yudin). Het ellipsoïdelgoritme heeft een polynomiale rekentijd, maar wordt voornamelijk gebruikt om theoretische resultaten te bewijzen.

In 1984 ontwikkelde Karmarkar [4] een zogenaamde “inwendige-punt” algoritme voor lineaire optimalisering. Dit algoritme heeft een polynomiale rekentijd *en* is ook praktisch efficiënt, alhoewel Simplex nog voor de meeste problemen sneller is. De komst van Karmarkar’s algoritme stimuleerde veel onderzoek en honderden versies van dit algoritme verscheen in de loop van de daaropvolgende jaren.

Sinds de komst van inwendige punt methoden zijn er tot voor kort geen conceptueel nieuwe algoritmische doorbraken geweest. Echter, in 2010 verscheen een artikel door Chubanov [1] die een algoritme presenteerde gebaseerd op een combinatie van een zogenaamde relaxatie-methode en projecties. Een belangrijke open vraag in de theorie van lineaire optimalisering: “bestaat er een sterk polynomiaal algoritme voor lineaire optimalisering” werd gedeeltelijk beantwoord [1, 2]. Chubanov liet namelijk zien dat zijn algoritme sterk polynomiaal is als de verzameling toegelaten oplossingen zich bevindt in de hypercubus. Voor algemene lineaire optimaliseringsproblemen is het algoritme polynomiaal, maar niet noodzakelijk sterk polynomiaal. In dit project zullen we deze recente ontwikkelingen in kaart brengen en in de context van lineaire algebra, traditionele methoden voor lineaire optimalisering en complexiteit goed beschrijven.

Begeleider: K. Aardal

References

- [1] S. Chubanov (2010). A polynomial relaxation-type algorithm for linear programming, http://www.optimization-online.org/DB_HTML/2011/02/2915.html.
- [2] S. Chubanov (2012). A strongly polynomial algorithm for linear systems having a binary solution, *Mathematical Programming* **134** 533–570.
- [3] G.B. Dantzig (1949). Programming in a linear structure, *Econometrica* **17** 73–74.
- [4] N. Karmarkar (1984). A new polynomial time algorithm for linear Programming, *Combinatorica* **4**(4) 373–395.
- [5] L.G. Khachiyan (1979), A polynomial Algorithm in Linear Programming, *Doklady Akademiiia Nauk SSSR* **244**:S 1093–1096, translated in Soviet Mathematics Doklady **20**:1 (1979) 191–194.