O-MINIMALE MEETKUNDE

BEGELEIDER: LENNY TAELMAN

In topologie en analyse komen veel voorbeelden voor van gekke deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ die nogal pathologische eigenschappen hebben. Denk maar aan de Cantorverzameling, de grafiek van $\sin(1/x)$, of de deelverzameling $\mathbf{Q}$ van $\mathbf{R}$.

Soms is het daarom handig om zich te beperken tot deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ met goede eigenschappen. Een mogelijkheid is om enkel naar *semi-algebraïsche verzamelingen* te kijken: dit zijn deelverzamelingen die gedefinieerd worden door ongelijkheden tussen polynomen in de coordinaten. Bijvoorbeeld:

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon x^2 + y^2 \leq 1\}$$

of

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \colon xyz = 1 \text{ en } 0 < x < y < z < 1\}.$$

Hoewel deze collectie deelverzamelingen zeer goede meetkundige eigenschappen heeft, is het een nogal beperkte collectie: veel interessante deelverzamelingen zoals bijvoorbeeld de grafiek van exp of van sin zijn niet bevat in deze collectie.

Het vinden van een goede collectie deelverzamelingen is een probleem wat geformaliseerd kan worden door de notie van *geordende structuren*. Een geordende structuur is een collectie deelverzamelingen $S_1 \subset \mathcal{P}(\mathbf{R})$, $S_2 \subset \mathcal{P}(\mathbf{R}^2)$, ... die moeten voldoen aan bepaalde eigenschappen die het mogelijk maken elementaire meetkundige operaties uit te voeren. Bijvoorbeeld moeten de S_n gesloten zijn onder vereniging en doorsnijding, moet het product $X \times Y$ van een $X \in S_n$ en een $Y \in S_m$ een element zijn van S_{n+m}, en moeten de coördinaatprojecties van een $X \in S_n$ in S_{n-1} zitten.

Een voorbeeld van een geordende structuur is de collectie van semi-algebraische verzamelingen van hierboven. Een ander voorbeeld is $S_n = \mathcal{P}(\mathbf{R}^n)$.

Een geordende structuur $(S_n)_n$ heet *o-minimaal* als alle elementen van S_1 eindige verenigingen van intervallen zijn. Het is niet moeilijk om aan te tonen dat de semi-algebraische verzamelingen een o-minimale structuur vormen. Een ander voorbeeld is de collectie van deelverzamelingen die kunnen gedefinieerd worden door gebruik te maken van ongelijkheden tussen *polynomiaal-exponentiële* uitdrukkingen zoals bijvoorbeeld

$$\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \colon 0 < e^{e^{x^2+1}} + e^{xy}y - xy^2 \leq 1\}.$$

Hoewel de voorwaarde van o-minimaliteit enkel op deelverzamelingen van $\mathbf{R}$ slaat, heeft deze toch zeer sterke gevolgen voor deelverzamelingen van $\mathbf{R}^n$ (bijvoorbeeld omdat ook de 1-dimensionale projecties van zo een deelverzameling eindige verenigingen van intervallen moeten zijn). Men kan bijvoorbeeld aantonen dat alle deelverzamelingen in een o-minimale structuur slechts eindig veel samenhangingscomponenten hebben.

Een bachelorscriptie over dit onderwerp zou twee aspecten kunnen behandelen: het geven van interessante *voorbeelden* en *niet-voorbeelden* van o-minimale structuren, en het ontwikkelen van de elementaire *meetkunde* van o-minimale structuren.