Groepen die rijen laten splitsen

Stel R is een ring. Een korte exacte rij $0 \to A \to B \to C \to 0$ van R-modulen *splitst* als er een isomorfisme $B \to A \oplus C$ van R-modulen is zodanig dat de samenstelling van de gegeven afbeelding $A \to B$ met $B \to A \oplus C$ de afbeelding $A \to A \oplus C$, $a \mapsto (a, 0)$ is, en bovendien de samenstelling van $B \to A \oplus C$ met de afbeelding $A \oplus C \to C$, $(a, c) \mapsto c$, de gegeven afbeelding $B \to C$ is; equivalent hiermee is: $A \to B$ heeft een R-lineaire linksinverse; en eveneens: $B \to C$ heeft een R-lineaire rechtsinverse.

Een R-moduul M heet *injectief* als elke exacte rij $0 \to M \to B \to C \to 0$ van R-modulen splitst, *semisimpel* als elke exacte rij $0 \to A \to M \to C \to 0$ van R-modulen splitst, en *projectief* als elke exacte rij $0 \to A \to B \to M \to 0$ van R-modulen splitst. Injectiviteit en projectiviteit zijn belangrijk in de homologische algebra. Het begrip van semisimpliciteit lijkt van een heel andere aard te zijn; het is belangrijk in de ringentheorie.

Het project bestaat eruit het analogon van deze begrippen voor het geval van *groepen* in plaats van *modulen* te bestuderen. Het gaat dan niet om drie maar om *zes* begrippen, omdat voor een exacte rij $0 \to A \to B \to C \to 0$ van groepen het bestaan van een linksinverse van $A \to B$ niet equivalent hoeft te zijn met het bestaan van een rechtsinverse van $B \to C$; in het eerste geval kan men B met het *product* van A en C identificeren, in het tweede geval slechts met een *semidirect product*. Het is zinvol—maar helaas nog niet bij iedereen gebruikelijk—een terminologisch onderscheid te maken, en over *splitsende* en *half-splitsende* rijen te spreken. Overeenkomstig heeft men injectieve, semisimpele, projectieve, half-injectieve, half-semisimpele en half-projectieve groepen. (De student mag onderzoeken of er alternatieve terminologie in zwang is.)

In het geval van R-modulen bestaan er goede karakteriseringen van injectiviteit, semisimpliciteit en projectiviteit, waarmee men modulen die een van deze eigenschappen hebben goed kan herkennen. In het geval $R = \mathbf{Z}$, als een R-moduul niets anders dan een abelse groep is, blijkt: een $\mathbf{Z}$-moduul M is injectief dan en slechts dan als M *deelbaar* is (d.w.z.: voor elke positieve gehele n is $M \to M$, $x \mapsto nx$, surjectief); semisimpel dan en slechts dan als elk element van M eindige kwadraatvrije orde heeft; en projectief dan en slechts dan als M een basis over $\mathbf{Z}$ heeft. Hieruit kan men, voor $R = \mathbf{Z}$, aflezen dat M twee van de drie eigenschappen heeft dan en slechts dan als $M = \{0\}$.

Voor welke van de zes genoemde eigenschappen van groepen kan men vergelijkbare karakteriseringen bewijzen? Hoe zit het met modulen die twee van de zes eigenschappen hebben? Hoeveel is over deze begrippen in de literatuur te vinden?

Natuurlijk kunnen al deze begrippen ook bestudeerd worden als men zich beperkt tot korte exacte rijen van groepen die aan een extra voorwaarde voldoen, zoals eindige groepen, oplosbare groepen, of nilpotente groepen.

Begeleider: H. W. Lenstra