Wiskundigen

Tentamen Lineaire Algebra 1

Donderdag 26 maart 2009, 14.00-17.00

Geen rekenmachines. Motiveer elk antwoord.

(1) Bepaal voor alle reële waarden van a de determinant en de rang van de matrix

$$C_a = \begin{pmatrix} 1 & a & a+1 \\ a & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

(2) Gegeven de matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bepaal de eigenwaarden en eigenvectoren van A.
(b) Bepaal een diagonale matrix D en een inverteerbare matrix C zodanig dat $A = CDC^{-1}$.
(c) Bepaal A^n voor alle positieve gehele getallen n.

(3) Het vlak $W \subset \mathbb{R}^4$ is gegeven door

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

en a is de vector $(0, 1, 0, 0)$.
(a) Bepaal een orthonormale basis voor W (met betrekking tot het standaard inproduct).
(b) Bepaal een basis voor $W^{\perp}$.
(c) Bereken de orthogonale projectie van a op W.
(d) Bereken de afstand van het punt $(0, 1, 0, 0)$ tot W.

Op de volgende pagina staan meer opgaven.

(4) Zij $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeven door $T(x) = C_2 \cdot x$ met C_2 als in opgave 1. Zij E de standaard basis voor $\mathbb{R}^3$. Definieer

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,2,0), \\ v_2 &= (1,0,-1), \\ v_3 &= (0,1,3). \end{aligned}$$

(a) Laat zien dat $B = (v_1, v_2, v_3)$ een basis is voor $\mathbb{R}^3$.
(b) Laat zien dat er geldt $[T]_E^E = C_2$.
(c) Bepaal de matrix $[T]_B^E$.

(5) Laat V de vectorruimte van alle 3×3 matrices zijn en W de deelruimte van alle antisymmetrische matrices, dat wil zeggen de matrices A waarvoor geldt $A^{\mathrm{t}} + A = 0$. Je hoeft niet te bewijzen dat W een deelruimte is.

(a) Laat zien dat voor alle $B, X \in W$ geldt $XB - BX \in W$.
(b) Laat zien dat voor alle $B \in W$ de afbeelding $T_B\colon W \to W$ gegeven door $T_B(X) = XB - BX$ lineair is.
(c) Laat zien dat er geen $B \in W$ is waarvoor T_B injectief is.
(d) Laat zien dat er geen $B \in W$ is waarvoor T_B surjectief is.

(6) Gegeven zijn de vectorruimtes V en W van dimensie respectievelijk n en m.

(a) Laat zien dat als $S\colon V \to W$ een lineaire afbeelding is, dan is de dimensie van de kern $\ker S$ tenminste $n - m$.
(b) Laat $S\colon V \to W$ en $T\colon V \to W$ twee lineaire afbeeldingen zijn en neem aan dat geldt $\ker S \cap \ker T = \{0\}$. Bewijs dat dan geldt $n \leq 2m$.