Tweede huiswerkopdracht Lineaire algebra 1
Uitwerking en opmerkingen

November 10, 2009

Opgave 1

Gegeven een vectorruimte V met deelruimtes U_1 en U_2. Als er geldt

$$\dim U_1 = 7, \qquad \dim U_2 = 9, \qquad \text{en } \dim(U_1 \cap U_2) = 4,$$

wat is dan het grootste getal d waarvoor zeker geldt $\dim V \geq d$?

Uitwerking

Volgens stelling 6.22 geldt

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) = \dim U_1 + \dim U_2,$$

waaruit we afleiden dat $\dim(U_1 + U_2) = 12$. Omdat $U_1 + U_2$ een lineaire deelruimte van V is, geldt $\dim V \geq 12$. Anderzijds kunnen we een voorbeeld construeren waarbij $\dim V = 12$: neem $V = \mathbb{R}^{12}$ en laat $e_1, e_2, \ldots, e_{12}$ de standaardbasisvectoren in $\mathbb{R}^{12}$ zijn. Kies nu $U_1 = L(e_1, e_2, \ldots, e_7)$ en $U_2 = L(e_4, e_5, \ldots, e_{12})$. Dan geldt $U_1 \cap U_2 = L(e_4, e_5, e_6, e_7)$ (ga na waarom; er geldt niet in het algemeen dat $L(S_1) \cap L(S_2) = L(S_1 \cap S_2)$ voor verzamelingen $S_1, S_2 \subset V$). Er is nu voldaan aan de voorwaarden

$$\dim U_1 = 7, \qquad \dim U_2 = 9, \qquad \text{en } \dim(U_1 \cap U_2) = 4.$$

We concluderen dat de grootste d waarvoor geldt $\dim V \geq d$ gelijk is aan 12.

Opmerkingen

(1A) Als je het vermoeden hebt dat de grootste d waarvoor geldt $\dim V \geq d$ gelijk is aan 12, dan moet je twee dingen bewijzen. Ten eerste dat $\dim V \geq 12$ en ten tweede dat er V, U_1 en U_2 zijn die aan alle voorwaarden voldoen en waarvoor bovendien geldt $\dim V = 12$. Dit tweede deel is door veel mensen vergeten.

(1B) In de opgaven zijn geen bases voor de vectorruimte en de deelruimtes gegeven. Je mag dus niet zomaar een basis gebruiken. Je kunt wel zelf een basis voor de ruimtes introduceren, maar als je dat willekeurig doet, hoeft niet te gelden dat de bases voor U_1 en U_2 overlappen. Het is goed mogelijk dat de bases van U_1 en U_2 geen enkel element gemeen hebben, terwijl $U_1 \cap U_2$ toch dimensie groter dan 0 heeft. Neem als kleiner voorbeeld bijvoorbeeld $V = \mathbb{R}^2$, $U_1 = L((1,0),(0,1))$ en $U_2 = L((1,1))$. De basis $((1,0),(0,1))$ voor U_1 heeft een lege doorsnede met de basis $((1,1))$ voor U_2, maar toch is de dimensie van $U_1 \cap U_2$ gelijk aan 1.

(1C) *Dimensies* zijn geen onderdelen van een vectorruimte. De dimensie van een vectorruimte is een eigenschap van die vectorruimte. Je kunt hier dus niet zeggen dat V twaalf dimensies heeft. En zo ook kun je niet praten over *overlappende dimensies* van U_1 en U_2.

Opgave 2

Zij V een vectorruimte. Laat zien dat er geldt $\dim V = \infty$ dan en slechts dan als er een oneindige rij van lineair onafhankelijke vectoren $v_1, v_2, v_3 \ldots$ in V bestaat.

Uitwerking

Stel eerst dat $\dim V = \infty$. Volgens definitie 6.16 betekent dat dat V geen eindige basis heeft. We construeren nu een oneindige rij van lineair onafhankelijke vectoren. Kies eerst $v_1 \in V$ willekeurig, maar ongelijk aan 0. We weten dat (v_1) geen basis is voor V, want dan zou $\dim V = 1$. Dus $L(v_1) \neq V$. We kunnen dus een $v_2 \in V \backslash L(v_1)$ vinden en deze is lineair onafhankelijk van v_1. In het algemeen kiezen we de $n+1$-ste vector v_{n+1} van onze rij als een vector van $V \backslash L(v_1, \ldots, v_n)$. Zo'n vector bestaat altijd, want $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ kan geen basis van V zijn (dan zou immers $\dim V = n$) en $L(v_1, \ldots, v_n)$ spant dus niet heel V op. Verder is v_{n+1} geen lineaire combinatie van $v_1, \ldots, v_n$ en dus linear onafhankelijk van $(v_1, \ldots, v_n)$. Op deze manier construeren we een oneindige rij van lineair onafhankelijke vectoren.

Stel nu andersom dat we een oneindige rij lineair onafhankelijke vectoren $v_1, v_2, \ldots$ in V gegeven hebben. We bewijzen uit het ongerijmde dat $\dim V = \infty$, dus stel dat de dimensie van V eindig is, zeg gelijk aan n. Volgens stelling 6.14 moeten de vectoren $v_1, v_2, \ldots, v_{n+1}$ nu lineair afhankelijk zijn; tegenspraak.

Opmerkingen

(2A) Dat er een oneindige rij lineair onafhankelijke vectoren in V bestaat, wil nog niet zeggen dat er geen eindige rij lineair onafhankelijke vectoren in V bestaat. Elk eindig stuk van de oneindige rij is immers zelf een eindige rij lineair onafhankelijke vectoren.

(2B) Definitie 6.16 zegt *niet* dat een vectorruimte V met $\dim V$ een oneindige basis heeft. Sterker nog, we hebben het woord *basis* alleen gedefinieerd voor eindige rijtjes. We kunnen dus helemaal niet praten over een oneindige basis; dat hebben we niet gedefinieerd.

(2C) Een vectorruimte met eindige dimensie n heeft een basis bestaande uit precies n vectoren. Maar je mag dit resultaat niet zomaar toepassen op een vectorruimte met oneindige dimensie. Daarvan hebben we helemaal niet iets dergelijks bewezen. Zie ook (2B).

(2D) Stelling 6.14 geldt voor (eindige) getallen m en n. Je kunt niet zomaar $m = \infty$ invullen.

Je kunt natuurlijk wel van een oneindige rij vectoren een eindig stukje nemen en daarop stelling 6.14 toepassen.

Opgave 3

Zij U een lineaire deelruimte van $\mathbb{R}^n$ en $(v_1, \ldots, v_k)$ een basis voor U. Definieer de afbeelding $T \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ door

$$T(x) = (\langle x, v_1\rangle, \langle x, v_2\rangle, \ldots, \langle x, v_k\rangle)\,.$$

a) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.

b) Laat zien dat de kern van T gelijk is aan $U^\perp$.

c) Laat zien dat de beperking $T|_U \colon U \to \mathbb{R}^k$ injectief is.

d) Bewijs dat $T|_U$ een isomorfisme is.

e) Bewijs dat $\dim U + \dim U^\perp = n$.

f) Bewijs dat $U^\perp$ een complementaire ruimte van U in $\mathbb{R}^n$ is.

Uitwerking

a) Laat $x, y \in \mathbb{R}^n$ en $\lambda \in \mathbb{R}$. Vanwege de eigenschappen van het inproduct geldt

$$\begin{aligned} T(x+y) &= (\langle x+y, v_1\rangle, \langle x+y, v_2\rangle, \ldots, \langle x+y, v_k\rangle) \\ &= (\langle x, v_1\rangle + \langle y, v_1\rangle, \langle x, v_2\rangle + \langle y, v_2\rangle, \ldots, \langle y, v_k\rangle + \langle x, v_k\rangle) \\ &= (\langle x, v_1\rangle, \langle x, v_2\rangle, \ldots, \langle x, v_k\rangle) + (\langle y, v_1\rangle, \langle y, v_2\rangle, \ldots, \langle y, v_k\rangle) \\ &= T(x) + T(y) \end{aligned}$$

en

$$\begin{aligned} T(\lambda x) &= (\langle \lambda x, v_1\rangle, \langle \lambda x, v_2\rangle, \ldots, \langle \lambda x, v_k\rangle) \\ &= (\lambda\langle x, v_1\rangle, \lambda\langle x, v_2\rangle, \ldots, \lambda\langle x, v_k\rangle) \\ &= \lambda\,(\langle x, v_1\rangle, \langle x, v_2\rangle, \ldots, \langle x, v_k\rangle) \\ &= \lambda T(x). \end{aligned}$$

Dit bewijst dat T een lineaire afbeelding is.

b) De kern van T zijn de vectoren $x \in \mathbb{R}^n$ waarvoor geldt $T(x) = 0$, oftewel $\langle x, v_i\rangle = 0$ voor $1 \leq i \leq k$. Omdat $(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ een basis voor U is, zijn er voor elke $u \in U$ scalairen $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ zodanig dat $u = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ en dus

$$\langle x, u\rangle = \lambda_1\langle x, v_1\rangle + \ldots + \lambda_n\langle x, v_n\rangle$$

voor alle x. Hieruit volgt dat er geldt $\langle x, v_i\rangle = 0$ voor $1 \leq i \leq k$ dan en slechts dan als er geldt $\langle x, u\rangle = 0$ voor **alle** $u \in U$. Dus geldt $\ker T = U^\perp$.

c) De kern van $T|_U$ is de doorsnede van U en $\ker T = U^\perp$, dus geldt $\ker T|_U = U^\perp \cap U = \{0\}$. Met lemma 8.5 volgt hieruit dat $T|_U$ injectief is.

d) Volgens stelling 8.13 is $\dim \ker T|_U + \text{rk } T|_U = \dim U$. We weten dat $\dim \ker T|_U = 0$ en $\dim U = k$, dus $\text{rk } T|_U = k$. Maar ook het codomein van de afbeelding heeft dimensie k, dus $T|_U$ is surjectief. Omdat hij ook al injectief was, is het een isomorfisme.

e) We passen opnieuw stelling 8.13 toe, maar nu op T: er geldt $\dim \ker T + \text{rk } T = \dim \mathbb{R}^n$. We weten al dat $T|_U$ surjectief is, dus ook T is surjectief, dus $\text{rk } T = k$. Dus $\dim \ker T = n - k$, waaruit volgt $\dim U + \dim U^\perp = k + (n-k) = n$.

f) Er geldt $U \cap U^\perp = \{0\}$, dus uit

$$\dim(U \cap U^\perp) + \dim(U + U^\perp) = \dim U + \dim U^\perp = k + (n-k) = n$$

volgt $\dim(U + U^\perp) = n$ en dus $U + U^\perp = \mathbb{R}^n$. Dus $U^\perp$ is een complementaire deelruimte van U in $\mathbb{R}^n$.

Opgave 4

Zij V en W vectorruimtes over een lichaam F met $\dim V = \dim W = n$. Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Laat zien dat de volgende uitspraken equivalent zijn:

a) De afbeelding f is een isomorfisme.

b) De afbeelding f is injectief.

c) De afbeelding f is surjectief.

Uitwerking

Een isomorfisme is een lineaire afbeelding die bijectief is, dus (a) $\Rightarrow$ (b) en (a) $\Rightarrow$ (c), en uit (b) en (c) samen volgt (a). Het is dus voldoende om nog te bewijzen dat (b) $\Leftrightarrow$ (c). Volgens stelling 8.13 geldt

$$\dim \ker f + \text{rk } f = \dim V.$$

Verder is f injectief dan en slechts dan als $\ker f = \{0\}$, oftewel dan en slechts dan als $\dim \ker f = 0$. En f is surjectief dan en slechts dan als $\text{im } f = W$, oftewel dan en slechts dan als $\text{rk } f = \dim W = n$. Verder merken we op dat $\dim V = n$, dus volgens bovenstaande formule is $\dim \ker f = 0$ dan en slechts dan als $\text{rk } f = n$. Kortom, f is injectief dan en slechts dan als f surjectief is. Dit bewijst (b) $\Leftrightarrow$ (c).

Opmerkingen

(4A) Bij deze opgave moet je bewijzen dat drie uitspraken equivalent zijn. Dat die drie uitspraken met (a), (b) en (c) aangegeven zijn, betekent niet dat dit een opgave met drie onderdelen (a), (b) en (c) is. Je moet bewijzen dat (a) waar is dan en slechts dan als (b) waar is, en dat (a) waar is dan en slechts dan als (c) waar is, en dat (b) waar is dan en slechts dan als (c) waar is. Oftewel, (a) $\Leftrightarrow$ (b), (a) $\Leftrightarrow$ (c) en (b) $\Leftrightarrow$ (c). Je hoeft niet noodzakelijk al deze pijltjes (zes stuks) te bewijzen, want sommige volgen uit andere. Het is bijvoorbeeld voldoende om (a) $\Leftrightarrow$ (b) $\Leftrightarrow$ (c) te bewijzen. Of (a) $\Rightarrow$ (b) $\Rightarrow$ (c) $\Rightarrow$ (a). Let op: als je aanneemt dat uitspraak (a) waar is en daaruit uitspraak (b) afleidt, dan heb je nog niet (a) $\Leftrightarrow$ (b) bewezen, maar slechts (a) $\Rightarrow$ (b). Dit is vaak fout gedaan.

(4B) Bij een injectieve functie is elk element in het codomein het beeld van hoogstens één element in het domein. Als het domein en het codomein eindig zijn en precies evenveel elementen bevatten, dan volgt hieruit dat elk element in het codomein het beeld is van precies één element in het domein. De functie is dan dus ook surjectief. Dit argument kun je niet toepassen op vectorruimtes. Een vectorruimte met dimensie n bevat over het algemeen niet n elementen, maar oneindig veel. Bij oneindige verzamelingen gaan dit soort telargumentjes (die wel werken bij eindige verzamelingen) mis. Toch bewijs je met deze opgave dat er wel een analogon van dit argument is, namelijk dat als twee vectorruimtes dezelfde dimensie hebben, dan is elke lineaire afbeelding ertussen injectief dan en slechts dan als die surjectief is.

Opgave 5

Stel U en U' zijn complementaire deelruimtes van een vectorruimte V. Dan definiëren we de *projectie* $\pi\colon V \to V$ *van* V *langs* U' *op* U door $\pi(v) = u$, waarbij $u \in U$ en $u' \in U'$ zodanig zijn dat $v = u + u'$. [Opmerking: Als $V = \mathbb{R}^n$ en $U' = U^\perp$, dan noemen we π de *orthogonale projectie van* V *op* U.]

a) Laat zien dat π goed gedefinieerd is.

b) Laat zien dat π lineair is.

c) Laat zien dat geldt $\pi \circ \pi = \pi$.

Uitwerking

a) Volgens lemma 6.25 bestaan er voor elke $v \in V$ unieke $u \in U$, $u' \in U'$ zodat $v = u + u'$. Aan elk element v in het domein wordt door π dus op een unieke manier $\pi(v) = u$ toegekend. Dus π is goed gedefinieerd.

b) Laat v_1 en v_2 willekeurige elementen van V zijn. We kiezen $u_1, u_2 \in U$ en $u_1', u_2' \in U'$ zodat $v_1 = u_1 + u_1'$ en $v_2 = u_2 + u_2'$. Dan geldt $\pi(v_1) = u_1$ en $\pi(v_2) = u_2$. Verder geldt $u_1 + u_2 \in U$ en $u_1' + u_2' \in U'$, dus

$$\pi(v_1 + v_2) = \pi((u_1 + u_2) + (u_1' + u_2')) = u_1 + u_2 = \pi(v_1) + \pi(v_2).$$

Zij nu λ een willekeurige scalar. Dan geldt $\lambda u_1 \in U$ en $\lambda u_1' \in U'$, dus

$$\pi(\lambda v_1) = \pi(\lambda u_1 + \lambda u_1') = \lambda u_1 = \lambda \pi(v_1).$$

Dit bewijs dat π lineair is.

c) Zij $v \in V$ willekeurig en schrijf $v = u + u'$ met $u \in U$ en $u' \in U'$. Dan geldt $\pi(v) = u$. Omdat $u = u + 0$ met $u \in U$ en $0 \in U'$, geldt verder $\pi(u) = u$.

$$(\pi \circ \pi)(v) = \pi(\pi(v)) = \pi(u) = u = \pi(v).$$

Dus $\pi \circ \pi = \pi$.

Opmerkingen

(5A) Als A en B verzamelingen zijn en we willen een afbeelding $f \colon A \to B$ definiëren, dan moeten we voor elk element $a \in A$ een element $b \in B$ aanwijzen; als we alleen maar een beschrijving van b geven, dan moet er wel een b zijn die aan die beschrijving voldoet en bovendien moet die beschrijving het element b ook uniek vastleggen. Anders weten we nog niet welk element we bedoelen en is de functie f niet goed gedefinieerd.

Een voorbeeld van een slechte definitie: "Zij $f \colon \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$ de functie gedefinieerd door $f(x) = y$ met $y \in \mathbb{R}$ zodanig dat $y^2 = x$."

Dit is een slechte definitie, want geldt er nu $f(1) = 1$ of $f(1) = -1$? Het probleem is dat de beschrijving van y het element y niet eenduidig vast legt. Ook moet je nog checken dat er uberhaupt wel een element y is dat aan de eisen voldoet, maar dat is in dit geval wel in orde, want elk niet-negatief reëel getal heeft een wortel.

In het geval van de opgave moet je dus laten zien dat er bij elke $v \in V$ (elk element in het domein) een **unieke** $u \in U$ is zodat v te schrijven is als $v = u + u'$ voor een zekere $u' \in U'$.

(5B) Vergeet niet de variabelen te introduceren die je gebruikt. Natuurlijk is het bij deze opgave logisch dat v, v_1 en v_2 elementen uit V zijn en dat u en u' staan voor de elementen uit U respectievelijk U' die opgeteld gelijk aan v zijn, maar je moet het toch definiëren. Voor hetzelfde geld had je de variabelen v en v' geïntroduceerd en dan was het ineens niet meer duidelijk geweest waar u' voor staat.

(5C) Het feit dat zowel π als $\pi \circ \pi$ als domein en codomein V hebben, is niet voldoende om te laten zien dat $\pi \circ \pi = \pi$. Er kunnen heel veel afbeeldingen van V naar V bestaan en die zijn niet allemaal gelijk. Om te bewijzen dat $\pi \circ \pi = \pi$, moet je laten zien dat voor alle $v \in V$ geldt: $(\pi \circ \pi)(v) = \pi(v)$.