Opgaven lineaire algebra, vrijdag 13 november, 2009

(1) Bereken van de volgende matrices over $\mathbb{C}$ de "reduced row-echelon form", de rang, een basis voor de rijruimte, en een basis voor de kern.

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1 & 1+i \\ 2 & 1-3i & 3-5i \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(2) Hoe bereken je een basis voor de kolomruimte van een matrix?

(3) Bereken een basis voor de kolomruimte van de matrices in opgave 1 (voor een aantal hoef je hier heel weinig te rekenen!).

(4) Zij P de vectorruimte van polynomen over $\mathbb{R}$ en zij U de deelruimte opgespannen door de elementen

$$\begin{array}{lllll} f_1 = x^4+ & -2x^3+ & & & -2, \\ f_2 = x^4+ & -x^3+ & -x^2+ & 2x & -2, \\ f_3 = x^4+ & -x^3+ & & x, & \\ f_4 = x^4+ & -x^3+ & x^2+ & & 2. \end{array}$$

Bereken de dimensie en een basis van U.

(5) Stel M, N zijn $n \times n$ matrices waarvoor geldt $MN = I_n$. Bewijs dat ook geldt $NM = I_n$.

(6) Bereken de rang van de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

over $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

(7) Bepaal de inverse van de matrices (over $\mathbb{R}$) die inverteerbaar zijn.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(8) (a) Bewijs dat voor elke twee verzamelingen $S, T \subset \mathbb{R}^n$ geldt
$$S^\perp \cap T^\perp = (S \cup T)^\perp.$$
(b) Bewijs dat voor elke twee deelruimtes $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ geldt
$$U_1 \cap U_2 = (U_1^\perp \cup U_2^\perp)^\perp.$$
(c) Bewijs dat voor elke twee deelruimtes $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ geldt
$$U_1 \cap U_2 = (U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp$$
en
$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp.$$

(9) We gaan de doorsnede van twee lineaire deelruimtes in $\mathbb{R}^4$ bepalen. Zij U_1 en U_2 de deelruimtes van $\mathbb{R}^4$ gegeven door
$$U_1 = L\big((1, 2, -1, 0), (-1, 1, 0, 3)\big),$$
$$U_2 = L\big((-2, 0, 2, 1), (1, 1, -2, 2)\big).$$
(a) Bereken voortbrengers van $U_1^\perp$, dus elementen $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^4$ zodanig dat
$$U_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ \langle x, v_1\rangle = \ldots = \langle x, v_r\rangle = 0\}.$$
(b) Bereken voortbrengers $w_1, \ldots, w_s \in \mathbb{R}^4$ voor U_2.
(c) Bepaal met behulp van de vorige opgave voortbrengers $z_1, \ldots, z_t \in \mathbb{R}^4$ voor $(U_1 \cap U_2)^\perp$.
(d) Bereken nu voortbrengers van $U_1 \cap U_2$.

Opmerking: Je kunt een lineaire deelruimte U van $\mathbb{R}^n$ geven door een stel voortbrengers te geven, of door een stel vergelijkingen te geven. Het geven van vergelijkingen is equivalent met het geven van voortbrengers van de ruimte $U^\perp$ (die je kunt berekenen als de kern van de matrix met voortbrengers voor U als rijen). De doorsnede van twee deelruimtes U_1 en U_2 wordt bepaald door vergelijkingen voor U_1 en voor U_2 samen te nemen. Uit Propositie 12.15 van het dictaat volgt dat dit ook werkt over andere lichamen F dan $\mathbb{R}$ als we definiëren
$$U^\perp = \{x \in F \ : \ [x, u] \text{ voor alle } u \in U\}$$
met
$$[(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)] = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$
Dan moet je wel oppassen, want er geldt niet noodzakelijk dat $U^\perp$ een complementaire deelruimte van U is, maar er geldt wel $U = (U^\perp)^\perp$ wegens Propositie 12.15.

(10) Bereken voortbrengers voor de doorsnede van de deelruimtes $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^5$ gegeven door
$$U_1 = L\big((-2, -1, -2, 2, 0), (2, -2, 0, 1, 1), (-1, 2, 1, -2, -1)\big),$$
$$U_2 = L\big((3, -4, -1, 3, 2)(1, 0, 1, -1, 0)(1, -1, -2, 1, -2)\big).$$