Opgaven lineaire algebra, vrijdag 4 december, 2009

Nog even herhaald (met extra notatie v_B voor verduidelijking):
Zij V en W vectorruimtes over F met respectievelijk basis $B = (v_1, \ldots, v_n)$ en $C = (w_1, \ldots, w_m)$. Voor een vector $v \in V$ schrijven we v_B voor het rijtje coëfficiënten van v ten opzichte van B. Met andere woorden, er geldt $v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ voor die unieke scalairen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ waarvoor geldt $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$. Zo schrijven we voor $w \in W$ ook w_C voor het rijtje coëfficiënten van w ten opzichte van C.

Zij $T\colon V \to W$ een lineaire afbeelding. Voor de matrix $M = [T]_C^B$, geassocieerd aan de lineaire afbeelding T ten opzichte van B en C, geldt

$$M \cdot v_B = \big(T(v)\big)_C$$

voor alle $v \in V$. Met andere woorden, als $x = v_B = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in F^n$ de coëfficiënten zijn van de vector v ten opzichte van B (dus $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$), dan is $Mx = Mv_B$ de vector van coëfficiënten van $T(v)$ ten opzichte van C.

Door te kijken naar de basis elementen v_j van B, waarvoor geldt $(v_j)_B = e_j$, met e_j de j-de standaardbasisvector van F^n, vinden we dat de j-de kolom van M gelijk is aan $\big(T(v_j)\big)_C$, dus aan de rij van coëfficiënten van $T(v_j)$ ten opzichte van C.

Stel dat B' en C' ook bases zijn voor respectievelijk V en W. Uit het diagram

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, "\mathrm{Id}"] \arrow[rrr, bend left, "T"] & V \arrow[r, "T"] & W \arrow[r, "\mathrm{Id}"] & W \\
F^n \arrow[u, "\Phi_{B'}"] \arrow[r, "{[\mathrm{Id}]_B^{B'}}"'] \arrow[rrr, bend right, "{[T]_{C'}^{B'}}"'] & F^n \arrow[u, "\Phi_B"] \arrow[r, "{[T]_C^B}"'] & F^m \arrow[u, "\Phi_C"] \arrow[r, "{[\mathrm{Id}]_{C'}^C}"'] & F^m \arrow[u, "\Phi_{C'}"]
\end{tikzcd}$$

volgt dat er geldt

$$[T]_{C'}^{B'} = [\mathrm{Id}]_{C'}^{C} \cdot [T]_C^B \cdot [\mathrm{Id}]_B^{B'} = \big([\mathrm{Id}]_C^{C'}\big)^{-1} \cdot [T]_C^B \cdot [\mathrm{Id}]_B^{B'}.$$

(1) (Voorbeeld van college) Zij B en C de standaardbases van $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. Zij $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ de afbeelding gegeven door

$$T\big((x, y)\big) \mapsto (2x - 3y, x + y, 3x + y).$$

(a) Geef de matrix $[T]_C^B$.

(b) Geef de matrix $[T]_{C'}^{B'}$ voor de basis $B' = \big((3, 4), (1, -2)\big)$ van $\mathbb{R}^2$ en de basis $C' = (v_1, v_2, v_3)$ van $\mathbb{R}^3$ met

$$v_1 = (1, 1, 1), \qquad v_2 = (1, 2, 3), \qquad v_3 = (1, 4, 9).$$

(c) Laat zien dat voor de vector $v \in \mathbb{R}^2$ met $v_{B'} = (1, 1)$ (dus $v = \Phi_{B'}((1, 1))$) inderdaad geldt

$$[T]_{C'}^{B'} \cdot v_{B'} = \big(T(v)\big)_{C'}.$$

(d) Herhaal die verificatie voor nog een aantal $v_{B'}$, zoals onder andere $(1, 0)$ en $(0, 1)$.

(2) Zij V_1 de vectorruimte van 2×2 matrices over $\mathbb{R}$ en V_2 de vectorruimte van 3×2 matrices over $\mathbb{R}$ met bases respectievelijk

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$$

en

$$C = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right).$$

Zij $T \colon V_1 \to V_2$ de lineaire afbeelding gegeven door

$$T(x) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot x.$$

Bepaal $[T]_C^B$.

(3) Zij $L \subset \mathbb{R}^2$ de lijn gegeven door $y = 2x$. Zij $T \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de orthogonale projectie van $\mathbb{R}^2$ op L.

(a) Bepaal $[T]_B^B$, waarbij B de standaardbasis is.

(b) Bepaal v_1 en v_2 zodanig dat (v_1) een basis is voor L en (v_2) een basis voor $L^\perp$. Zij $C = (v_1, v_2)$. Bepaal $[T]_C^C$.

(c) Bepaal $[T]_B^B$ nogmaals, dit keer met behulp van $[T]_C^C$ en een basisverandering.

Opmerking: Soms is het dus makkelijker om een lineaire afbeelding te beschrijven ten opzichte van een andere basis dan de standaardbasis. Met behulp van een basisverandering kun je het dan ook ten opzichte van de standaardbasis beschrijven.

(4) Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak gegeven door $x + 3y - 2z = 0$. Zij $\pi \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de orthogonale projectie van $\mathbb{R}^3$ op V. Zij B de standaardbasis voor $\mathbb{R}^3$. Bepaal $[\pi]_B^B$ op twee manieren: direct en via $[\pi]_C^C$, waarbij $C = (v_1, v_2, v_3)$ een basis is die bestaat uit een basis (v_1, v_2) voor V en een basis (v_3) voor $V^\perp$.

(5) Bepaal het spoor van de volgende drie matrices.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 11 \\ 3 & 2 & 7 & -13 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 5 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & 11 \\ 3 & 2 & 7 & -13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \\ 1 & 8 & 27 & 64 \end{pmatrix}$$

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 25 & 49 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & -3 & 5 \\ -2 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 6 \\ 0 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 7 \\ 1 & 25 & 49 \end{pmatrix}$$