Opgaven lineaire algebra, vrijdag 11 december, 2009

Zij F een lichaam en n een positief geheel getal. Zij

$$D\colon (F^n)^n \to F$$

een afbeelding. Een element $x \in (F^n)^n$ is een rij $x = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ van n vectoren in F^n. Als je de vectoren als rij-vectoren onder elkaar in een matrix zet, dan kun je aan x ook denken als een matrix. Dan wordt D dus een afbeelding

$$D\colon \mathrm{Mat}(n \times n, F) \to F.$$

Een betere manier om dit te zeggen is dat er een isomorfisme

$$\mathrm{Mat}(n \times n, F) \to (F^n)^n$$

is dat een matrix stuurt naar de rij van zijn rijen. De afbeelding

$$\mathrm{Mat}(n \times n, F) \to F$$

is dan de samenstelling van dit isomorfisme met de afbeelding

$$(F^n)^n \to F.$$

De afbeelding D heet *alternerend* als voor elke $i \neq j$ en elke rij $x = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ met $v_i = v_j$ geldt $D(x) = 0$. Verder noemen we D *multilineair* als voor elke i en elke $n-1$ vectoren $v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ de afbeelding

$$F^n \to F, \quad w \mapsto D\big((v_1, \dots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \dots, v_n)\big)$$

lineair is. Met andere woorden, D is lineair in elke variabele apart. We noemen D *determinantaal* als D zowel alternerend als multilineair is. Dit impliceert onder andere dat voor elke i en elke rij $(v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)$ en elke scalair λ geldt

$$D\big((v_1, \dots, \lambda v_i, \dots, v_n)\big) = \lambda D\big((v_1, \dots, v_i, \dots, v_n)\big).$$

In termen van matrices betekent dit dat als M een $n \times n$ matrix is en M' is de matrix die je uit M krijgt door een rij met een scalair te vermenigvuldigen, dan geldt $D(M') = \lambda D(M)$. Lemma 15.2 uit het dictaat zegt dat als M' uit M wordt verkregen door twee rijen te verwisselen, dan geldt $D(M') = -D(M)$ en als M' wordt verkregen uit M door een veelvoud een rij bij een andere rij op te tellen, dan geldt $D(M') = D(M)$. Verder geldt $D(M) = 0$ als de rijen van M lineair afhankelijk zijn, dus als M rang kleiner dan n heeft en dus geen inverse heeft.

We hebben gezien dat op schaling na, er precies een determinantale functie $D\colon (F^n)^n \to F$ is. Er is er dus precies een waarvoor geldt $D((e_1, \dots, e_n)) = 1$. We noemen deze functie det en in termen van matrices wordt deze inductief gegeven door

$$\det(M) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} m_{ij} \det M_{ij},$$

waarbij een vaste i met een vast gekozen rij correspondeert, m_{ij} het element van M op rij i en kolom j is, en M_{ij} de matrix is die je uit M krijgt door rij i en kolom j weg te laten. Je kunt ook inductief checken dat det inderdaad determinantaal is en zo gechaald is als geclaimd.

Als we voor notationeel gemak de determinant aanduiden met rechte strepen, dan geldt dus bijvoorbeeld door langs de eerste rij te ontwikkelen:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 4 & -2 & 3\\ -2 & 1 & 2\end{vmatrix} &= 2\cdot\begin{vmatrix}-2 & 3\\ 1 & 2\end{vmatrix} - 3\cdot\begin{vmatrix}4 & 3\\ -2 & 2\end{vmatrix} + (-1)\cdot\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}\\ &= 2(-2\cdot 2 - 3\cdot 1) - 3(4\cdot 2 - 3\cdot(-2)) + (-1)\cdot(4\cdot 1 - (-2)\cdot(-2))\\ &= -56.\end{aligned}$$

Voor een algemene 3×3 matrix vinden we

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}).$$

De functie $\det\colon \mathrm{Mat}(n\times n, F)$ ook multilineair is in de kolommen. Verder geldt er dat als M twee dezelfde kolommen heeft, dat dan de rang van M kleiner is dan n, dus dat $\det M = 0$, dus $M \mapsto \det(M^t)$ is ook alternerend en dus een determinantale functie in de rijen van M, en omdat $\det M$ en $\det M^t$ hetzelfde geschaald zijn, geldt er $\det M^t = \det M$ voor alle M (waarbij M^t de getransponeerde is van M). Zie ook Stelling 15.13 in het dictaat. Dit betekent dat je de determinant ook kunt uitrekenen door langs een kolom te ontwikkelen. Bovendien kun je de determinant van een stel vectoren ook uitrekenen door ze als kolommen in een matrix te zetten.

Stel $f\colon F^n \to F^n$ is een lineaire afbeelding. Dan schelen een gegeven determinantale functie $D\colon (F^n)^n \to F$ en de geïnduceerde determinantale functie

$$D\circ f\colon (F^n)^n \to F, \quad (v_1, v_2, \ldots, v_n) \mapsto D\big(f(v_1), \ldots, f(v_n)\big)$$

een scalaire factor, die we de determinant $\det f$ van f noemen. Belangrijk is dat er dan geldt

(1) Als $f, g\colon F^n \to F^n$ lineaire afbeeldingen zijn, dan geldt

$$\det(f\circ g) = (\det f)\cdot(\det g).$$

(2) Als $f\colon F^n \to F^n$ een lineaire afbeelding is, dan geldt

$$\det f = \det\big(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\big) = \det[f]_B^B,$$

waarbij $B = (e_1, \ldots, e_n)$ de standaardbasis is.

Merk hierbij op dat de kolommen van $[f]_B^B$ precies de vectoren $f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)$ zijn. De eerste gelijkheid is ook de reden dat je over $\mathbb{R}$ aan $\det f$ kunt denken als de "opblaasfactor" van f. Het is op teken na de inhoud van het scheve blok

$$P(f(e_1), \ldots, f(e_n)) = \{\lambda_1 f(e_1) + \ldots + \lambda_n f(e_n) \ : \ \lambda_i \in [0,1]\},$$

wat het beeld is onder f van de hyperkubus $P(e_1, \ldots, e_n)$ die zelf inhoud 1 heeft. Inhouden worden dus met een factor $\det f$ geschaald onder f.

(3) Als f inverteerbaar is, dan geldt $\det(f^{-1}) = (\det f)^{-1}$. Dit volgt uit

$$(\det f)(\det f^{-1}) = \det(f\circ f^{-1}) = \det(\mathrm{id}) = 1.$$

(4) Voor matrices $A, B \in \mathrm{Mat}(n\times n, F)$ geldt $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

(5) Als een matrix $A \in \mathrm{Mat}(n\times n, F)$ inverteerbaar is, dan geldt $(\det A^{-1}) = (\det A)^{-1}$.

(6) Voor matrices $A, B \in \mathrm{Mat}(n\times n, F)$ waarbij A inverteerbaar is, geldt $\det(A^{-1}BA) = (\det A^{-1})(\det B)(\det A) = \det B$.

(7) Een matrix of afbeelding is inverteerbaar dan en slechts dan als de determinant ongelijk is aan 0.

Nu we determinanten van matrices en lineaire afbeeldingen van F^n naar F^n begrijpen, kunnen we ook determinanten definiëren voor lineaire afbeeldingen van een vectorruimte V van dimensie n naar zichzelf. In het dictaat gebeurt dat op dezelfde manier als hierboven, namelijk door te laten zien dat determinantale functies van V^n naar F op schaling na uniek zijn; de determinant van een lineaire afbeelding $f\colon V \to V$ is dan de factor die een determinantale functie $D\colon V^n \to F$ verschilt van de geïnduceerde determinantale afbeelding $D \circ f\colon V^n \to f$.

We kunnen de determinant van een lineaire afbeelding $f\colon V \to V$ ook anders definiëren. Kies een basis B voor V. Dan hoort er een matrix $[f]_B^B$ bij de afbeelding f ten opzichte van de basis B. Definieer

$$\det f = \det([f]_B^B).$$

Dit is goed gedefinieerd, want voor een andere basis B' voor V geldt

$$[f]_{B'}^{B'} = \left([\mathrm{id}]_B^{B'}\right)^{-1} \cdot [f]_B^B \cdot [\mathrm{id}]_B^{B'},$$

en dus

$$\det([f]_{B'}^{B'}) = \left(\det([\mathrm{id}]_B^{B'})\right)^{-1} \cdot \det([f]_B^B) \cdot \det([\mathrm{id}]_B^{B'}) = \det([f]_B^B).$$

(1) Bereken de determinant van de volgende matrices, zowel door te vegen, als door langs een rij of kolom te ontwikkelen. .

$$\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ -3 & -3 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -3 & -2 \\ 3 & -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2) Bepaal de determinant van de volgende lineaire afbeeldingen.
   (a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (2x + z, y - 3z, -x + 2y + 3z)$,
   (b) rotatie $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ om de oorsprong over een hoek φ.
   (c) projectie $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ van $\mathbb{R}^3$ op het vlak gegeven door $x - 2y + z = 0$.
   (d) de afbeelding $P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$, waarbij $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte van polynomen in x over $\mathbb{R}$ van graad ten hoogste n is, gegeven door $f \mapsto xf'$ met f' de afgeleide van f.
   (e) de afbeelding $P_n(\mathbb{R}) \to P_n(\mathbb{R})$, waarbij $P_n(\mathbb{R})$ de vectorruimte van polynomen in x over $\mathbb{R}$ van graad ten hoogste n is, gegeven door $f \mapsto xf'$ met f' de afgeleide van f.

(3) Waar of niet waar?
   (a) Voor matrices $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ geldt $\mathrm{Tr}AB = \mathrm{Tr}BA$.
   (b) Voor matrices $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ geldt $\mathrm{Tr}AB = (\mathrm{Tr}A)(\mathrm{Tr}B)$.
   (c) Voor matrices $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ geldt $\mathrm{Tr}A + B = \mathrm{Tr}A + \mathrm{Tr}B$.
   (d) Voor matrices $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ geldt $\det AB = \det BA$.
   (e) Voor matrices $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ geldt $\det AB = (\det A)(\det B)$.
   (f) Voor matrices $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ geldt $\det A + B = \det A + \det B$.

(g) Voor een matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ geldt $\det A \neq 0$ dan en slechts dan als A inverteerbaar is.

(4) Zij V een vectorruimte over F van dimensie n en $f\colon V \to V$ een lineaire afbeelding.

(a) Laat zien dat de kern van f niet triviaal is dan en slechts dan als $\det f = 0$.

(b) Zij $\lambda \in F$. Laat zien dat er een niet-triviale vector $v \in V$ is met $f(v) = \lambda v$ dan en slechts dan als $\lambda \cdot \mathrm{id} - f$ een niet-triviale kern heeft en dan en slechts dan als $\det(\lambda \cdot \mathrm{id} - f) = 0$. We noemen zo'n scalair λ een *eigenwaarde* en de bijbehorende vector v een *eigenvector*.

(c) Neem een variabele t en definieer het *characteristiek polynoom* $P_f(t)$ van f door

$$P_f(t) = \det(t \cdot \mathrm{id} - f).$$

Laat zien dat de eigenwaarden van f precies de nulpunten van P_f zijn.

(d) Bereken het characteristiek polynoom van de lineaire afbeeldingen uit opgave 2.

(e) Stel dat B een basis is voor V en dat de elementen van B eigenvectoren zijn. Laat zien dat $[f]_B^B$ dan een diagonale matrix is, waarbij de elementen op de diagonaal eigenwaarden van f zijn.