Opgaven lineaire algebra, vrijdag 11 december, 2009

(1) Vind voor elke eigenwaarde λ van de volgende matrices over $\mathbb{R}$ een basis van de eigenruimte E_λ.

$$\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 8 & -7 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -6 & -4 \\ 8 & 6 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 \\ 0 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 4 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ -9 & -9 & 0 & -3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(2) Tijdens college hebben we gezien dat een matrix M diagonaliseerbaar is over een lichaam F dan en slechts dan als er een basis van eigenvectoren voor M is. Dit is het geval dan en slechts dan als het karakteristiek polynoom f_M van M het product is van lineaire factoren over F en bovendien voor elk nulpunt $\lambda \in F$ van f_M (dus voor elke eigenwaarde λ) de algemene ongelijkheid

$$\dim E_\lambda(M) \leq \text{algebraïsche multipliciteit van } \lambda$$

een gelijkheid is. Hierbij is de algebraïsche multipliciteit van λ gedefinieerd als de multipliciteit van λ als nulpunt van f_M. Dat wil zeggen dat als

$$f_M(t) = (t - \lambda_1)^{r_1} \cdots (t - \lambda_s)^{r_s},$$

en alle λ_i zijn verschillend, dan is r_i de multipliciteit van λ_i. De dimensie $\dim E_\lambda(M)$ wordt vaak de meetkundige multipliciteit van λ genoemd.

Welke van de matrices in opgave 1 zijn diagonaliseerbaar?

(3) Stel V is een n-dimensionale vectorruimte over het lichaam F en $T\colon V \to V$ is een lineaire afbeelding. Stel $B = (v_1, \ldots, v_n)$ is een basis van eigenvectoren. Dan is $[T]_B^B$ een diagonaalmatrix. Stel $C = (w_1, \ldots, w_n)$ is een willekeurige basis. Dan geldt zoals we al vaak gezien hebben

$$[T]_C^C = [\mathrm{Id}]_C^B \cdot [T]_B^B \cdot [\mathrm{Id}]_B^C.$$

Nu gebruiken we het speciale geval dat $V = F^n$, terwijl C de standaardbasis is en $T\colon F^n \to F^n$ gegeven wordt door $x \mapsto Mx$. Dan geldt dus $[T]_C^C = M$ en $[\mathrm{Id}]_C^B$ is de matrix waarin de eigenvectoren $v_1, \ldots, v_n$ ten opzichte van de standaardbasis staan. Als we schrijven $D = [T]_B^B$ en $P = [\mathrm{Id}]_C^B$, dan geldt dus

$$M = PDP^{-1}.$$

Met andere woorden, als je een matrix M wilt diagonaliseren, dan bereken je de eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ (met multipliciteiten) en een basis $(v_1, \ldots, v_n)$ van eigenvectoren, waarbij v_i eigenwaarde λ_i heeft. Dan nemen we D de diagonaalmatrix met de eigenwaarden $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ op de diagonaal en P de matrix waarvan de j-de kolom gelijk is aan v_j. Dan geldt $M = PDP^{-1}$.

Vind voor alle matrices M van opgave 1 die diagonaliseerbaar zijn een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodanig dat $M = PDP^{-1}$.

(4) Gegeven de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 2 \\ 0 & -3 & 0 \\ -4 & -12 & -2 \end{pmatrix}$$

(a) Bepaal een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodanig dat $M = PDP^{-1}$.

(b) Bepaal M^k voor alle gehele getallen $k \in \mathbb{Z}$.

(5) Bereken M^k voor alle volgende matrices M en alle $k \in \mathbb{Z}$.

$$\begin{pmatrix} 7 & -10 \\ 5 & -8 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -2 & 3 & -7 \\ 0 & -4 & 6 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$$

(6) Geef voor elke van de volgende deelruimtes V van $\mathbb{R}^n$ de matrices die projectie op V en spiegeling in V beschrijven ten opzichte van de standaardbasis. (Hint: doe het eerst ten opzichte van een basis van eigenvectoren.)

(a)

$$V = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \ : \ a + b - c = a + c = 0\}.$$

(b) Het vlak in $\mathbb{R}^3$ met normaalvector $(1, 2, -1)$.

(c)

$$V = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 \ : \ a + b - 2c + 3d = 2a - b + c - d = 0\}.$$

(d)

$$V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \ : \ x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0\}.$$

(7) Bepaal voor elk van de volgende matrices M of ze diagonaliseerbaar zijn. Zo ja, geef dan een inverteerbare matrix P en een diagonaalmatrix D zodanig dat $M = PDP^{-1}$.

(a)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

over $\mathbb{R}$.

(b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$$

over $\mathbb{C}$.

(c)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

over $\mathbb{R}$.

(d)

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

over $\mathbb{C}$.

(8) Voor welke φ is de rotatie $R \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ om 0 over een hoek φ diagonaliseerbaar over $\mathbb{R}$?