Opgaven lineaire algebra, vrijdag 30 oktober, 2009

(1) Welke van de volgende functies tussen vectorruimtes is een lineaire afbeelding?
  (a) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x - 2y, z + 1)$,
  (b) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2)$,
  (c) $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4,\ (x, y, z) \mapsto (x + 2y, x - 3z, y - z, x + 2y + z)$,
  (d) $\mathbb{R}^3 \to V,\ (x, y, z) \mapsto xv_1 + yv_2 + zv_3$, voor een vectorruimte V over $\mathbb{R}$ met $v_1, v_2, v_3 \in V$,
  (e) $P(\mathbb{R}) \to P(\mathbb{R}),\ f \mapsto f'$, waarbij $P(\mathbb{R})$ de vectorruimte van polynomen over $\mathbb{R}$ is en f' de afgeleide van f,
  (f) $P(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2,\ f \mapsto (f(2), f'(0))$.

(2) Zij $\rho\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ de lineaire afbeelding gegeven door rotatie om de oorsprong $(0, 0)$ over de hoek θ.
  (a) Wat zijn de beelden $\rho((1, 0))$ en $\rho((0, 1))$?
  (b) Laat zien dat er geldt

$$\rho((x, y)) = (x \cos\theta - y \sin\theta, x \sin\theta + y \cos\theta).$$

(3) Geef een expliciete uitdrukking voor de lineaire afbeelding $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die gegeven wordt door spiegeling in de lijn $y = -x$.

(4) Gegeven is de afbeelding

$$T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto x(\tfrac{3}{5}, \tfrac{4}{5}) + y(\tfrac{4}{5}, -\tfrac{3}{5})$$

en de vectoren $v_1 = (2, 1)$ en $v_2 = (-1, 2)$.
  (a) Laat zien dat er geldt $T(v_1) = v_1$ en $T(v_2) = -v_2$.
  (b) Laat zien dat de lineaire afbeelding gegeven door spiegeling in de lijn $2y - x = 0$ gelijk is aan T.

(5) Zij $f\colon V \to W$ een lineaire afbeelding en U een lineaire deelruimte van W. Laat zien dat $f^{-1}(U)$ een deelruimte van V is die $\ker f$ bevat.

(6) Gegeven een lineaire afbeelding $f\colon V \to W$. Neem aan dat V eindigdimensionaal is. Laat zien dat f surjectief is dan en slechts dan als voor elke $v_1, \ldots, v_r \in V$ met $L(v_1, \ldots, v_r) = V$ geldt $L(f(v_1), \ldots, f(v_r)) = W$.

(7) Bij deze opgave mag je gebruiken dat een polynoom f van graad k over een lichaam F hooguit k verschillende nulpunten in F heeft. Zij n een positief geheel getal en $P_n(F)$ de vectorruimte van polynomen over F van graad ten hoogste n. Neem aan dat $a_1, a_2, \ldots, a_{n+1} \in F$ onderling verschillend zijn. Zij $T\colon P_n(F) \to F^{n+1}$ de functie gegeven door

$$T(f) = (f(a_1), f(a_2), \ldots, f(a_{n+1}))\,.$$

  (a) Laat zien dat T een lineaire afbeelding is.
  (b) Laat zien dat T injectief is.
  (c) Laat zien dat er voor iedere $i \in \{1, \ldots, n + 1\}$ een uniek polynoom $f_i \in P_n(F)$ is zodanig dat $f_i(a_j) = 1$ als $j = i$ en $f_i(a_j) = 0$ als $j \neq i$.

(d) Laat zien dat $(f_1, f_2, \ldots, f_{n+1})$ een basis is voor $P_n(F)$.

(8) Geef een expliciete uitdrukking voor de lineaire afbeelding $s\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ die gegeven wordt door spiegeling in de lijn $y = 3x$.

(9) Stel V en W zijn vectorruimtes over hetzelfde lichaam F. Beschouw de verzameling $\mathrm{Hom}(V, W)$ van alle lineaire afbeeldingen van V naar W. Laat zien dat $\mathrm{Hom}(V, W)$ met de puntsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging een vectorruimte is.