Opgaven lineaire algebra, vrijdag 6 november, 2009

(1) Voor de gegeven matrix A en vector x, bereken Ax.

(a)

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad x = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix},$$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},$$

(c)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & -2 \\ -3 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{en} \qquad x = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(2) Voor welke $i, j \in \{1, \ldots, 5\}$ bestaat het product $A_i \cdot A_j$ en in welke volgorde?

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_4 = \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bereken (een aantal van) deze producten.

(3) Voor elke $i \in \{1, , \ldots, 5\}$ definiëren we de lineaire afbeelding f_i door $x \mapsto A_i x$ met A_i als in de vorige opgave.

(a) Wat zijn de domeinen en codomeinen van deze functies?

(b) Welke van deze functies kun je samenstellen en welke matrices horen dan bij de samenstelling (geef alleen aan welke twee matrices je moet vermenigvuldigen en in welke volgorde)?

(c) Is er een volgorde waarop je alle functies kunt samenstellen, en zo ja, welk product van matrices hoort bij deze samenstelling, en wat is het domein en codomein?

(4) Vind twee matrices A en B zodanig dat AB een nulmatrix is (die dus alleen maar nullen bevat), terwijl het product BA ook bestaat, maar geen nulmatrix is.

(5) Gegeven de volgende lineaire afbeeldingen $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, bepaal een matrix A zodanig dat de afbeelding ook geschreven kan worden als $x \mapsto Ax$.

(a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $(x, y, z) \mapsto (3x + 2y - z, -x - y + z, x - z, y + z)$,

(b) $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x + 2y - 3z, 2x - y + z, x + y + z)$,

(c) $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto x \cdot (1, 2) + y \cdot (2, -1) + z \cdot (-1, 3)$,

(d) $j\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ v \mapsto (\langle v, w_1\rangle, \langle v, w_2\rangle, \langle v, w_3\rangle)$, met $w_1 = (1, -1)$, $w_2 = (2, 3)$ en $w_3 = (-2, 4)$.

(6) Gegeven de matrix

$$M = \begin{pmatrix} -4 & -3 & 0 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en de lineaire afbeelding $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto Mx$ for de bijbehorende m en n. Wat zijn m en n en wat zijn vectoren $v_1, \ldots, v_n$ zodanig dat f ook gegeven wordt door

$$f\big((x_1, x_2, \ldots, x_n)\big) = x_1 v_1 + \ldots + x_n v_n?$$

(7) Bereken de inverse van de volgende matrices

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(8) Bestaat de inverse van de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

en zo nee, waarom niet?

(9) Zoals gezien, zeggen we dat een matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ inverteerbaar is als er een matrix $C \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ is zodanig dat $AC = CA = I_n$. We schrijven dan $A^{-1} = C$.

Laat zien dat als $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ beide inverteerbaar zijn, dan is ook AB inverteerbaar en er geldt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.