Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 22 oktober, 2009

(1) Zij V het vlak in $\mathbb{R}^3$ door de punten

$$P_1 = (1, 2, 1), \quad P_2 = (0, 1, 1) \quad \text{en} \quad P_3 = (-1, 1, 3).$$

(a) Geef een parametrisatie voor V. Dat wil zeggen, vind vectoren p, v_1, v_2 zodanig dat geldt

$$V = \{p + sv_1 + tv_2 \ : \ s, t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Geef een vergelijking voor V.

(c) Bepaal de afstand van het punt $Q = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak gegeven door

$$x + 2y - 3z = 1.$$

(d) Bepaal de hoek tussen de vectoren $(1, 2, 3, 4)$ en $(4, 3, 2, 1)$ in $\mathbb{R}^4$.

(2) Laat zien dat de vectoren

$$v_1 = (1, -1, 2, 0), \quad v_2 = (1, -1, -2, 0), \quad v_3 = (3, -2, 1, 4)$$

in $\mathbb{R}^4$ lineair onafhankelijk zijn en breid het rijtje (v_1, v_2, v_3) uit tot een basis voor $\mathbb{R}^4$.

(3) Gegeven een vectorruimte V en twee lineaire deelruimtes U_1 en U_2 van V. Bewijs dat de doorsnede $U_1 \cap U_2$ weer een lineaire deelruimte is.

(4) Gegeven een vectorruimte V en complementaire lineaire deelruimtes U_1 en U_2 van V. Met andere woorden, er geldt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ en $U_1 + U_2 = V$. Laat zien dat er voor elke $v \in V$ *unieke* vectoren $u_1 \in U_1$ en $u_2 \in U_2$ zijn zodanig dat $v = u_1 + u_2$.

Zie achterkant voor laatste opgave!

(5) Waar of niet waar?
Geef een tegenvoorbeeld of schets een **korte** uitleg (hooguit twee regels).

(a) Zij V de vectorruimte van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dan is de verzameling
$$\{f \in V \;:\; f(x) \geq 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R}\}$$
een lineaire deelruimte.

(b) Als (v_1, v_2, v_3) een basis is voor een vectorruimte V dan is
$$(v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 - v_1)$$
dat ook.

(c) Als voor twee lineaire deelruimtes U en V van $\mathbb{R}^9$ geldt
$$\dim U = \dim V = 5,$$
dan bevat $U \cap V$ een vector $v \neq 0$.

(d) In de vectorruimte van alle polynomen over $\mathbb{Q}$ zijn de zes polynomen
$$\begin{aligned}&x+1,\\&x-2,\\&x^2-3x+2,\\&x^3-x,\\&x^3+x^2+x-3,\\&x^4+x^2+1\end{aligned}$$
lineair afhankelijk.

(e) Voor alle $r, s \in \mathbb{Q}$ is de verzameling
$$W_{r,s} = \{(w,x,y,z) \in \mathbb{Q}^4 \;:\; x + ry = r^2(z-w) + s\}.$$
een lineaire deelruimte van $\mathbb{Q}^4$ dan en slechts dan als $s = 0$.