Tweede huiswerkopdracht Lineaire algebra 1
oplossingen

October 16, 2010

- **Opgave 1:** Zij S de verzameling van alle rijtjes $(a_n)_{n\geq 0}$ reële getallen (dus $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$), die voldoen aan de relatie

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$$

voor alle $n \geq 0$. Laat zien dat de (componentsgewijze) som van twee rijtjes uit S weer in S ligt, en dat de (componentsgewijze) scalaire vermenigvuldiging van een rijtje uit S weer in S ligt. Laat zien dat S (met deze optelling, scalaire vermenigvuldiging en met het element $0 = (0, 0, 0, 0, \ldots)$) een reële vectorruimte is.

Oplossing.

Eerst laten we zien dat de som van twee elementen van S weer in S zit. Laat daartoe $a = (a_n)_{n\geq 0}$ en $b = (b_n)_{n\geq 0}$ twee rijtjes in S zijn. Deze voldoen dus aan de relaties

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \qquad \text{en} \qquad b_{n+2} = b_{n+1} + b_n \tag{1}$$

voor alle $n \geq 0$. De som van deze twee rijtjes is het rijtje $a + b = (a_n + b_n)_{n\geq 0}$. [Dit is formele notatie voor het rijtje waarvan de n-de component gelijk is aan $a_n + b_n$.] Om te laten zien dat $a + b$ weer in S zit, moeten we laten zien dat $a + b$ voldoet aan de relatie $(a + b)_{n+2} = (a + b)_{n+1} + (a + b)_n$ voor alle $n \geq 0$, oftewel dat geldt

$$a_{n+2} + b_{n+2} = a_{n+1} + b_{n+1} + a_n + b_n$$

voor alle $n \geq 0$. Maar we zien meteen dat dat klopt door de twee relaties in (1) bij elkaar op te tellen. Er volgt dat $a + b$ een element van S is.

Nu laten we zien dat het scalair product van $\lambda \in \mathbb{R}$ en $a = (a_n)_{n\geq 0} \in S$ weer in S zit. We weten dus dat a voldoet aan de relatie $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ voor alle $n \leq 0$. Om te laten zien dat $\lambda a = (\lambda a_n)_{n\geq 0}$ weer in S zit, moeten we bewijzen dat voor alle $n \geq 0$ geldt $\lambda a_{n+2} = \lambda a_{n+1} + \lambda a_n$. Maar dit volgt direct uit het feit dat geldt $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$ voor alle $n \geq 0$, door aan beide zijden van het =-teken met λ te vermenigvuldigen. Er volgt dat λa een element van S is.

Uit het bovenstaande volgt dat de optelling $+$ op S echt een afbeelding van $S \times S$ naar S is, en dat de scalaire vermenigvuldiging $\cdot$ echt een afbeelding van $\mathbb{R} \times S$ naar S is. Het nulelement $0 = (0)_{n\geq 0} = (0, 0, \ldots)$ zit ook in S, aangezien uiteraard geldt dat $0 = 0 + 0$. Om te laten zien dat $(S, +, \cdot, 0)$ een reële vectorruimte is, moeten we nagaan of de acht axioma's van een vectorruimte gelden. Bij de meeste kunnen we echter meteen zien dat ze gelden, door op te merken dat de operaties componentsgewijs zijn en dat $\mathbb{R}$ een lichaam is (of dat $\mathbb{R}$ een $\mathbb{R}$-vectorruimte is). Dit geldt voor alle axioma's behalve axioma 4. Dit axioma zegt dat voor alle $a \in S$ er een $a' \in S$ moet zijn zodanig dat $a + a' = 0$. Neem dus een element $a = (a_n)_{n \geq 0}$ in S. We kiezen $a' = (-1) \cdot a = (-a_n)_{n \geq 0}$. Het is nu duidelijk dat $a + a' = 0$, maar we moeten nog bewijzen dat $a' \in S$. Merk op dat a' het scalaire product is van $-1 \in \mathbb{R}$ en $a \in S$, dus we hebben hierboven al bewezen dat $a' = (-1) \cdot a$ in S zit. We concluderen dat $(S, +, \cdot, 0)$ een vectorruimte over $\mathbb{R}$ is. $\square$

Alternatieve oplossing. Als we eenmaal hebben bewezen dat S gesloten is onder optelling en scalaire vermenigvuldiging, en dat S het element 0 bevat, kunnen we ook anders verder. Namelijk, S is een deelverzameling van $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, de verzameling van alle functies van $\mathbb{N}$ naar $\mathbb{R}$. Een functie $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ wordt immers uniek bepaald door de waarden $f(0), f(1), f(2), \ldots$ dus f kunnen we 'identificeren' met het rijtje $(f(0), f(1), f(2), \ldots)$. Belangrijk daarbij is dat de optelling en scalaire vermenigvuldigen die we op deze rijtjes hebben gedefinieerd, precies overeenkomt met de bewerkingen op $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Nu weten we dat S een deelverzameling van $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ is. We hebben al eerder bewezen dat $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ een reële vectorruimte is, dus het is voldoende om te laten zien dat S een deelruimte is. Maar de drie eisen die we daarvoor moeten nagaan, zijn precies de drie die we al hebben gecontroleerd. Dus S is een deelruimte van $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, en daarmee zelf een vectorruimte. $\square$

- **Opgave 2:** Stel dat $(V, +, \cdot, 0)$ een vectorruimte is. Bewijs, direct vanuit de acht eigenschappen voor een vectorruimte, dat als voor twee vectoren $x, y \in V$ geldt $x + y = y$, dan geldt $x = 0$.

  Oplossing.

  Zij $x, y \in V$ zodanig dat $x + y = y$. Omdat V een vectorruimte is, bestaat er een $y' \in V$ zodanig dat $y + y' = 0$ (axioma 4). [Dit is de notatie van het college en de nieuwe versie van het dictaat; je mag ook al direct $-y$ schrijven voor y', zoals in de oude versie.] Dus $(x + y) + y' = y + y' = 0$. Ook is de optelling associatief in V (axioma 2), en hieruit volgt dat $x + 0 = x + (y + y') = 0$. Merk tenslotte op dat 0 een neutraal element onder de optelling is (axioma 3), dus $x = x + 0 = 0$.

- **Opgave 3:** Laat zien dat $\mathbb{R}$ een vectorruimte over $\mathbb{Q}$ is met de gebruikelijke optelling en (scalaire) vermenigvuldiging.

  Oplossing.

  We weten al dat $\mathbb{R}$ een vectorruimte over zichzelf is. [In het algemeen is namelijk elk lichaam F een vectorruimte over zichzelf, want de optelling en vermenigvuldiging

  $$+ \colon F \times F \to F \qquad \text{en} \qquad \cdot \colon F \times F \to F$$

  en het element $0 \in F$ voldoen aan alle axioma's uit de definitie voor een vectorruimte en zelfs aan nog meer!]

  We kunnen we de (scalaire) vermenigvuldiging voor $\mathbb{R}$ beperken tot $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ en hebben dus een optelling en scalaire vermenigvuldiging

  $$+ \colon \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \text{en} \qquad \cdot \colon \mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

  en een element 0. Aan alle axioma's die alleen maar zeggen dat "voor alle scalairen uit $\mathbb{Q}$ en alle vectoren uit $\mathbb{R}$ iets specifieks geldt" is nu uiteraard voldaan, omdat we al weten dat het zelfs voor alle scalairen uit $\mathbb{R}$ geldt, dus in het bijzonder voor alle scalairen uit $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$. Het enige axioma dat in de definitie van de nieuwe versie van het dictaat overblijft om gecheckt te worden is axioma (4). Natuurlijk geldt nog steeds dat er voor alle $x \in \mathbb{R}$ een $x' \in \mathbb{R}$ is met $x + x' = 0$, namelijk het element $x' = -x$, dus ook aan axioma (4) is voldaan. [*Alternatieve opmerking:* Je kunt ook zeggen dat axioma's (1)-(4) alleen maar iets over de optelling zeggen. Omdat we de optelling niet hebben beperkt gelden die axioma's nog steeds.]

Als je de originale versie van het dictaat gebruikt, dan moet je ook nog iets zeggen over axioma (3), namelijk dat er nog steeds een 0 is. Maar dat is natuurlijk het geval! Dit volgt ook uit de alternatieve opmerking.

We concluderen dat $\mathbb{R}$ inderdaad een vectorruimte over $\mathbb{Q}$ is.

- **Opgave 4:** Zij V een vectorruimte over een lichaam F. Een deelverzameling $U \subset V$ heet een *deelruimte* van V als aan de volgende drie voorwaarden is voldaan.

  a) Er geldt $0 \in U$.
  b) Voor alle $x, y \in U$ geldt $x + y \in U$.
  c) Voor alle $\lambda \in F$ en alle $x \in U$ geldt $\lambda x \in U$.

  Laat zien dat elke deelruimte U van V zelf ook een vectorruimte over F is (met dezelfde optelling en scalaire vermenigvuldiging als V). Laat ook zien dat voor elke twee deelruimtes $U_1, U_2 \subset V$ de doorsnede $U_1 \cap U_2$ ook een deelruimte van V is.

  Oplossing.

  Het eerste deel is precies Lemma 5.2 uit (de nieuwe versie van) het dictaat. Het tweede deel is Lemma 5.7. We schrijven dat deel hier nog een keer uit voor twee deelruimtes, zoals in de opgave.

  Neem aan dat U_1 en U_2 deelruimtes van V zijn. Om te laten zien dat de doorsnede $U_1 \cap U_2$ ook een deelruimte is, checken we de drie eisen van de definitie.

  a) Omdat U_1 en U_2 deelruimtes van V zijn, geldt er $0 \in U_1$ en $0 \in U_2$, dus ook $0 \in U_1 \cap U_2$.
  b) Stel $x, y \in U_1 \cap U_2$. Dan geldt $x, y \in U_1$ en $x, y \in U_2$. Omdat U_1 en U_2 deelruimtes van V zijn, geldt er ook $x + y \in U_1$ en $x + y \in U_2$, dus ook $x + y \in U_1 \cap U_2$.
  c) Stel $x \in U_1 \cap U_2$ en $\lambda \in F$. Dan geldt $x \in U_1$ en $x \in U_2$. Omdat U_1 en U_2 deelruimtes van V zijn, geldt er ook $\lambda x \in U_1$ en $\lambda x \in U_2$, dus ook $\lambda x \in U_1 \cap U_2$.

  We zien dat inderdaad aan alle drie de eisen is voldaan, dus $U_1 \cap U_2$ is een deelruimte.