Derde huiswerkopdracht Lineaire algebra 1

November 15, 2010

Dit huiswerkexamen moest 8 november, uitgewerkt in LaTeX, worden ingeleverd aan het **begin** van het college.

- **Opgave 1:** Zij P de vectorruimte van polynomen over $\mathbb{R}$ en zij U de deelruimte opgespannen door de elementen

$$\begin{array}{rrrrrr} f_1 = & x^4+ & 2x^3+ & -x^2+ & & 1, \\ f_2 = & -x^4+ & x^3+ & x^2+ & -2x+ & 2, \\ f_3 = & 3x^4+ & x^3+ & 2x^2+ & -x+ & 1, \\ f_4 = & -3x^4+ & 2x^3+ & -2x^2+ & -x+ & 2. \end{array}$$

Bereken een basis voor U en de dimensie van U.

Oplossing.

De vier polynomen 1, x, x^2, x^3 en x^4 zijn lineair onafhankelijk in P. Om de lineaire afhankelijkheden van f_1, f_2, f_3, f_4 te bepalen kunnen we dus hun coëfficiënten in een matrix zetten en die in rijtrapvorm brengen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 8 & -5 & -1 & 5 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -15 & 15 & -3 & -6 \\ 0 & 24 & -15 & -3 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & -13 & 9 \\ 0 & 0 & -15 & 13 & -9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & -13 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De niet-nul rijen van de laatste matrix corresponderen met de polynomen

$$g_1 = x^4 + 2x^3 - x^2 + 1, \qquad g_2 = 3x^3 - 2x + 3, \qquad g_3 = 15x^2 - 13x + 9.$$

Deze polynomen spannen dezelfde ruimte op als f_1, f_2, f_3, f_4, oftewel $L(g_1, g_2, g_3) = U$. Bovendien zijn ze lineair onafhankelijk omdat de laatste matrix in rijtrapvorm staat. Dus g_1, g_2, g_3 vormen een basis voor U. De dimensie van U is het aantal elementen in een basis voor U, dus $\dim U = 3$.

Opmerking.

Merk op dat in de tweede stap de laatste twee rijen met 3 vermenigvuldigd worden omdat de tweede rij met een 3 begint. Hiermee voorkom je in de latere stapen noemers.

Uit alleen het feit dat de laatste rij nul is kun je niet direct concluderen dat f_4 een lineaire combinatie is van de andere drie polynomen. Het had bijvoorbeeld best zo kunnen zijn geweest dat je onderweg de vierde rij een keer verwisseld had met een andere. Dat is echter niet zo en f_4

is inderdaad een lineaire combinatie van de andere drie. Als je tijdens het vegen bijhoudt welke lineaire combinaties van polynomen horen bij de rijen, dan vind je

$$\begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2+f_1 \\ f_3-3f_1 \\ f_4+3f_1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2+f_1 \\ 3f_3-9f_1 \\ 3f_4+9f_1 \end{pmatrix}$$
$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2+f_1 \\ 3f_3+5f_2-4f_1 \\ 3f_4-8f_2+f_1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2+f_1 \\ 3f_3+5f_2-4f_1 \\ 3f_4+3f_3-3f_2-3f_1 \end{pmatrix}.$$

Dit betekent dat er geldt $f_4 = f_1 + f_2 - f_3$ en $g_1 = f_1$ en $g_2 = f_1 + f_2$ en $g_3 = -4f_1 + 5f_2 + 3f_3$.

- **Opgave 2:** Zij U_1 en U_2 de deelruimtes van $\mathbb{R}^5$ gegeven door

$$U_1 = L\big((1,2,-1,0,1),(-1,1,1,-2,2),(3,1,2,-1,1)\big),$$
$$U_2 = L\big((-2,0,2,1,3),(2,1,1,-2,2),(-3,-1,5,0,3)\big).$$

Geef een basis voor de doorsnede $U_1 \cap U_2$.

Oplossing 1.

We gebruiken de identiteit
$$U_1 \cap U_2 = (U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp.$$

Met behulp van de rijtrapvorm bepalen we eerst voortbrengers voor $U_1^\perp$ en $U_2^\perp$. De ruimte U_1 wordt voortgebracht door de rijen van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Door te vegen vinden we voor deze matrix een rijtrapvorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 15 & -13 & 9 \end{pmatrix}$$

(net als de eerste drie rijen van de matrix bij opgave 1). De rijen van deze nieuwe matrix zijn lineair onafhankelijk en brengen ook U_1 voort. Er geldt dus $\dim U_1 = 3$. Omdat $U_1^\perp$ een complementaire ruimte van U_1 is geldt $\dim U_1^\perp = 5 - \dim U_1 = 2$. We kunnen met de rijtrapvorm eenvoudig als volgt een basis voor $U_1^\perp$ bepalen.

De kolommen zonder pivots horen bij de vierde en vijfde coördinaat. We kunnen dus kiezen $a_4 = 1$ en $a_5 = 0$ en vinden dan een element $a = (a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) \in U_1^\perp$ door met de rijen uit de rijtrapvorm van onder naar boven achtereenvolgens de coördinaten a_3, a_2 en a_1 te bepalen. Wegens de derde rij volgt

$$0 = 15a_3 - 13a_4 + 9a_5 = 15a_3 - 13,$$

dus $a_3 = \frac{13}{15}$. De tweede rij geeft

$$0 = 3a_2 - 2a_4 + 3a_5 = 3a_2 - 2,$$

dus $a_2 = \frac{2}{3}$. Tenslotte geeft de eerste rij

$$0 = a_1 + 2a_2 - a_3 + a_5 = a_1 + 2 \cdot \tfrac{2}{3} - \tfrac{13}{15} = a_1 + \tfrac{7}{15},$$

dus $a_1 = -\frac{7}{15}$ en $a = \bigl(-\frac{7}{15}, \frac{2}{3}, \frac{13}{15}, 1, 0\bigr)$. Kiezen we $b_4 = 0$ en $b_5 = 1$, dan vinden we op dezelfde manier nog een element $b = (b_1, b_2, b_3, b_4, b_5) \in U_1^\perp$, namelijk $b = (\frac{2}{5}, -1, -\frac{3}{5}, 0, 1)$. Door de vierde en vijfde coördinaat te beschouwen zien we dat a en b lineair onafhankelijk zijn, dus ze vormen een basis voor $U_1^\perp$ (we wisten immers al dat $\dim U_1^\perp = 2$).

[In het algemeen vind je een basis voor $U^\perp$ door eerst voortbrengers voor $U \subset \mathbb{R}^n$ als rijen in een matrix te zetten, die matrix te vegen tot rijtrapvorm, en daarna voor elk van de niet-pivot-bevattende kolommen een element in $U^\perp$ te bepalen, namelijk door de bijbehorende coördinaat gelijk te kiezen aan 1, de overige coördinaten behorende bij niet-pivot-bevattende kolommen gelijk aan 0 en de andere coördinaten volgen dan uit de vergelijkingen.]

Zo bepalen we ook voortbrengers voor $U_2^\perp$. We zetten de voortbrengers van U_2 in een matrix

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Door te vegen [als je eerst de derde rij van de eerste aftrekt krijg je daar een 1 op de eerste coördinaat, wat noemers vermijdt] vinden we voor deze matrix een rijtrapvorm

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 10 & -5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Er zijn weer drie niet-nul rijen, dus $\dim U_2 = 3$ en dus $\dim U_2^\perp = 5 - 3 = 2$. Op dezelfde manier als hiervoor vinden we twee voortbrengers voor $U_2^\perp$, namelijk $c = (1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 0)$ en $d = (\frac{4}{5}, -\frac{29}{10}, -\frac{7}{10}, 0, 1)$.

De deelruimte $U_1^\perp + U_2^\perp$ wordt voortgebracht door a, b, c, d, dus om $U_1 \cap U_2 = (U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp$ te bepalen, passen we nog een keer de bovenstaande methode toe. We zetten de vectoren a, b, c, d als rijen in een matrix, na ze eerst met een constante te hebben vermenigvuldigd om de noemers weg te werken. We krijgen

$$\begin{pmatrix} -7 & 10 & 13 & 15 & 0 \\ 2 & -5 & -3 & 0 & 5 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & -29 & -7 & 0 & 10 \end{pmatrix}.$$

We kunnen die in de volgende rijtrapvorm brengen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

[Er zijn vele andere rijtrapvormen; alle werken net zo goed, maar deze is wel een van de eenvoudigste] De rijen van deze matrix brengen $U_1^\perp + U_2^\perp$ voort. Omdat ze lineair onafhankelijk zijn geldt $\dim(U_1^\perp + U_2^\perp) = 4$, en dus $\dim(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = 5 - 4 = 1$. Er is maar één kolom zonder pivot, namelijk de vijfde. We kiezen $x_5 = 2$ om noemers te voorkomen en vinden een vector $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ in $(U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp = U_1 \cap U_2$, namelijk $x = (1, 0, 4, -3, 2)$. Omdat er geldt $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, vormt x ook een basis voor de doorsnede.

Opmerking

We weten al dat de beschreven methode (die boven drie keer is toegepast) bij een stel voortbrengers voor $U \subset \mathbb{R}^n$ een basis voor $U^\perp$ construeert, dus de opmerkingen over de dimensies hoeven niet per se gemaakt te worden.

Oplossing 2.

Hier gebruiken we de identiteit $U_1 = (U_1^\perp)^\perp$. Laat w_1, w_2, w_3 de voortbrengers van U_2 zijn. Dan zoeken we dus alle lineaire combinaties van w_1, w_2, w_3 die ook in U_1 zitten en die dus loodrecht staan op $U_1^\perp$. [Met andere woorden, we zoeken alle lineaire combinaties van w_1, w_2, w_3 die aan de vergelijkingen voor U_1 voldoen.] Omdat we in oplossing 1 al gezien hebben dat $U_1^\perp$ wordt voortgebracht door a en b, zoeken we dus alle lineaire combinaties van w_1, w_2, w_3 die loodrecht staan op a en op b. In formules betekent dit

$$\begin{aligned}
U_1 \cap U_2 &= (U_1^\perp)^\perp \cap U_2 \\
&= \{x \in U_2 \mid \forall u \in U_1^\perp : \langle u, x\rangle = 0\} \\
&= \{x \in U_2 \mid \langle x, a\rangle = \langle x, b\rangle = 0\} \\
&= \{rw_1 + sw_2 + tw_3 \mid r, s, t \in \mathbb{R} \quad && \text{en } \langle rw_1 + sw_2 + tw_3, a\rangle = 0 \\
& && \text{en } \langle rw_1 + sw_2 + tw_3, b\rangle = 0\} \\
&= \{rw_1 + sw_2 + tw_3 \mid r, s, t \in \mathbb{R} \quad && \text{en } r\langle w_1, a\rangle + s\langle w_2, a\rangle + t\langle w_3, a\rangle = 0 \\
& && \text{en } r\langle w_1, b\rangle + s\langle w_2, b\rangle + t\langle w_3, b\rangle = 0\}
\end{aligned}$$

We schalen a en b en nemen $a = (-7, 10, 13, 15, 0)$ en $b = (2, -5, -3, 0, 5)$. Met

$$w_1 = (-2, 0, 2, 1, 3), \quad w_2 = (2, 1, 1, -2, 2), \quad w_3 = (-3, -1, 5, 0, 3)$$

vinden we

$$\begin{aligned}
\langle w_1, a\rangle &= 55 \qquad & \langle w_2, a\rangle &= -21 \qquad & \langle w_3, a\rangle &= 76 \\
\langle w_1, b\rangle &= 5 & \langle w_2, b\rangle &= 6 & \langle w_3, b\rangle &= -1
\end{aligned}$$

We zoeken dus r, s, t met

$$\begin{aligned}
55r - 21s + 76t &= 0 \\
5r + 6s - t &= 0.
\end{aligned}$$

Daarvoor zetten we de coëfficiënten weer in een matrix

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 55 & -21 & 76 \end{pmatrix}$$

die we tot rijtrapvorm

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & -1 \\ 0 & -87 & 87 \end{pmatrix}$$

vegen. We kiezen de laatste coördinaat van (r, s, t) gelijk aan 1 en vinden dat de verzameling van alle oplossingen (r, s, t) wordt opgespannen door $(r, s, t) = (-1, 1, 1)$. De doorsnede wordt dus voortgebracht door

$$-1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 + 1 \cdot w_3 = (1, 0, 4, -3, 2).$$

Oplossing 3.

Met

$$v_1 = (1, 2, -1, 0, 1), \quad v_2 = (-1, 1, 1, -2, 2), \quad v_3 = (3, 1, 2, -1, 1)$$

en

$$w_1 = (-2, 0, 2, 1, 3), \quad w_2 = (2, 1, 1, -2, 2), \quad w_3 = (-3, -1, 5, 0, 3)$$

zoeken we lineaire combinaties van v_1, v_2, v_3 die ook lineaire combinaties van w_1, w_2, w_3 zijn. We zoeken dus a, b, c, r, s, t met

$$av_1 + bv_2 + cv_3 - rw_1 - sw_2 - tw_3 = 0.$$

Voor elk van de vijf coördinaten geeft dit een vergelijking waarvan we de coëfficiënten als rij in de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -2 & -1 & -5 \\ 0 & -2 & -1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -3 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

zetten. [Merk op dat de vectoren $v_1, v_2, v_3, -w_1, -w_2, -w_3$ als kolommen in de matrix M staan en dat we zoeken naar een vector $z = (a, b, c, r, s, t)$, of als kolom geschreven

$$z = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ r \\ s \\ t \end{pmatrix}$$

met $Mz = 0$.] Een rijtrapvorm voor M is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

en we vinden door de laatste coördinaat gelijk te kiezen aan 1, dat de oplossingsruimte wordt voortgebracht door

$$(a, b, c, r, s, t) = (-1, 1, 1, -1, 1, 1).$$

De doorsnede $U_! \cap U_2$ wordt dus voortgebracht door

$$-v_1 + v_2 + v_3 = -w_1 + w_2 + w_3 = (1, 0, 4, -3, 2).$$

Oplossing 4.

Eerst zetten we de voortbrengers voor U_1 als rijen in een matrix. De geredecuurde rijtrapvorm daarvan is

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{15} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{2}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{13}{15} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

We doen hetzelfde voor U_2 en vinden

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{29}{10} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{10} \end{pmatrix}$$

Noem de rijen van de eerste matrix v_1', v_2', v_3' (deze brengen U_1 voort) en van de tweede matrix w_1', w_2', w_3' (deze brengen U_2 voort). Dan zoeken we net als in oplossing 3 scalairen a, b, c, r, s, t zodanig dat

$$av_1' + bv_2' + cv_3' = rw_1' + sw_2' + tw_3'.$$

Als we de eerste drie coördinaten van de rechter- en linkerkant vergelijken, dan volgt direct $a = r$, $b = s$ en $c = t$. Dat reduceert alles naar drie variabelen r, s, t. Het vergelijken van de vierde en vijfde coördinaat geeft de vergelijkingen

$$\begin{aligned} \tfrac{7}{15}r - \tfrac{2}{3}s - \tfrac{13}{15}t &= -r + \tfrac{1}{2}s - \tfrac{1}{2}t, \\ -\tfrac{2}{5}r + s + \tfrac{3}{5}t &= -\tfrac{4}{5}r + \tfrac{29}{10}s + \tfrac{7}{10}t. \end{aligned}$$

Brengen we alles naar één kant en vermenigvuldigen we alles om de noemers weg te werken, dan krijgen we

$$44r - 35s - 11t = 0$$
$$4r - 19s - t = 0.$$

De oplossingsruimte in $\mathbb{R}^3$ hiervan wordt voortgebracht door $(1, 0, 4)$, dus de doorsnede wordt voortgebracht door

$$1 \cdot w_1' + 0 \cdot w_2' + 4 \cdot w_3' = (1, 0, 4, -3, 2).$$

- **Opgave 3:** Zij V een vectorruimte. Laat zien dat er geldt $\dim V = \infty$ dan en slechts dan als er een oneindige rij van lineair onafhankelijke vectoren $v_1, v_2, v_3, \ldots$ in V bestaat.

  Oplossing.

  Stel eerst dat $\dim V = \infty$. We gaan een oneindige rij van lineair onafhankelijke vectoren in V construeren. Merk op dat $V \neq 0$, anders zou V dimensie 0 hebben. Er is dus een niet-nul vector $v_1 \in V$. Het rijtje v_1 (dat een rijtje van lengte 1 is) is uiteraard lineair onafhankelijk. Stel nu dat we al een rijtje $v_1, \ldots, v_n$ van lineair onafhankelijke vectoren in V gemaakt hebben. Als ook zou gelden dat $L(v_1, \ldots, v_n) = V$, dan is $v_1, \ldots, v_n$ een eindige basis van V. Maar per definitie betekent $\dim V = \infty$ dat V geen eindige basis heeft! Dus $L(v_1, \ldots, v_n) \neq V$, zodat er een vector $v_{n+1} \in V \setminus L(v_1, \ldots, v_n)$ is. Deze vector is geen lineaire combinatie van $v_1, \ldots, v_n$, dus het rijtje $v_1, \ldots, v_{n+1}$ is weer een stel lineair onafhankelijke vectoren. Zo construeren we een oneindige rij vectoren in V. Dit is een rij lineair onafhankelijke vectoren in V, omdat ieder beginstuk $v_1, \ldots, v_n$ van die rij lineair onafhankelijk is.

  Stel nu andersom dat er een oneindig rijtje $v_1, v_2, v_3, \ldots$ lineair onafhankelijke vectoren in V is. We bewijzen uit het ongerijmde dat $\dim V = \infty$. Als dat niet zo is, dan heeft V een eindige basis en geldt $\dim V = n$ voor zekere $n \geq 0$. Wegens stelling 6.14 kunnen de vectoren $v_1, \ldots, v_{n+1}$ dan niet lineair onafhankelijk zijn. Maar dat is in tegenspraak met de aanname! Dus V heeft geen eindige basis, en $\dim V = \infty$. $\square$

- **Opgave 4:** Gegeven een vectorruimte V van dimensie n en twee deelruimtes U_1 en U_2 met $U_1 \cap U_2 = (0)$. Bewijs dat als geldt $\dim U_1 + \dim U_2 \geq n$, dan geldt $\dim U_1 + \dim U_2 = n$ en $U_1 + U_2 = V$.

  Oplossing.

  Stel dat $\dim U_1 + \dim U_2 \geq n$. Omdat $U_1 \cap U_2 = (0)$, geldt er dat $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$. Dus, vanwege (6.22)

  $$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) \qquad (*)$$

  Aangezien $\dim(U_1 + U_2) \leq \dim V = n$ (vanwege (6.17)), volgt hieruit dat $\dim U_1 + \dim U_2 \leq n$. In combinatie met onze aanname, impliceert dit dat $\dim U_1 + \dim U_2 = n$.

  Merk nu op dat vanwege (*), er ook geldt dat $\dim(U_1 + U_2) = n$. Nu volgt uit (6.17) dat $U_1 + U_2 = V$.