Vierde huiswerkopdracht Lineaire algebra 1

December 12, 2010

- **Opgave 1:** Voor positieve gehele getallen m, n schrijven we

$$\mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{R})$$

voor de vectorruimte van alle $m \times n$ matrices, met de gebruikelijke optelling en scalaire vermenigvuldiging. Zij M de matrix

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 1 \\ 5 & 3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

a) Voor welke n is er een afbeelding

$$T\colon \mathrm{Mat}(4 \times 14, \mathbb{R}) \to \mathrm{Mat}(3 \times n, \mathbb{R}), \quad X \mapsto MX$$

?

b) Laat zien dat T lineair is.

c) Stel $X \in \ker T$. Laat zien dat voor elke kolomvector v van X geldt $v \in \ker M$.

d) Geef een basis voor de kern van T.

e) Wat is de rang T?

Oplossing.

a. Voor alle 4×14-matrices X geldt dat MX bestaat en een 3×14-matrix is. Dus er is een afbeelding T als in de opgave dan en slechts dan als $n = 14$.

b. We gaan na dat T de gewenste eigenschappen heeft:

Zij $X, Y \in \mathrm{Mat}(4 \times 14, \mathbb{R})$. Dan geldt, vanwege distributiviteit van de matrixvermenigvuldiging:

$$\begin{aligned} T(X + Y) &= M(X + Y); \\ &= MX + MY; \\ &= T(X) + T(Y). \end{aligned}$$

Zij nu $\lambda \in \mathbb{R}$, $X \in \mathrm{Mat}(4 \times 14, \mathbb{R})$. Dan geldt,

$$\begin{aligned} T(\lambda X) &= M(\lambda X); \\ &= \lambda MX; \\ &= \lambda T(X). \end{aligned}$$

Dus T is lineair.

c. Zij $X \in \mathrm{Mat}(4 \times 14, \mathbb{R})$. Merk dan op dat de j-de kolom van MX gelijk is aan het product Mx_j, waar x_j de j-de kolomvector is van X. Hieruit volgt dat $MX = 0$ dan en slechts dan als voor alle kolommen x van X geldt dat $Mx = 0$. M.a.w., $X \in \ker T$ dan en slechts dan als voor alle kolommen van X geldt dat $x \in \ker M$.

[Opmerking: Dit is iets sterker dan dat we voor (c) moesten bewijzen, maar dit maakt een alternatieve oplossing mogelijk voor (d).]

d. We berekenen eerst de kern van M. Hiertoe gaan we M vegen. Het resultaat is de volgende matrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Hieruit lezen we af dat een basis van de kern van M wordt gegeven door $(-1, 1, -1, 1)^T$.

Bekijk nu de rij van 14 matrices gegeven door

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

We laten zien dat deze een basis vormen voor $\ker T$. Merk ten eerste op dat al deze matrices daadwerkelijk in $\ker T$ zitten. Merk vervolgens op dat deze matrices lineair onafhankelijk zijn, en dat uit (c) volgt dat deze matrices $\ker T$ opspannen. Dus de gegeven rij matrices is inderdaad een basis voor $\ker T$.

Alternatieve oplossing:

De kern van M bepalen we op dezelfde manier. Nu volgt uit (onze sterkere versie van) (c) dat $\ker T$ bestaat uit alle matrices van de vorm

$$\begin{pmatrix} -\lambda_1 & \cdots & -\lambda_{14} \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{14} \\ -\lambda_1 & \cdots & -\lambda_{14} \\ \lambda_1 & \cdots & \lambda_{14} \end{pmatrix},$$

waar $\lambda_i \in \mathbb{R}$ voor $i = 1, \ldots, 14$. Dus wordt een basis van $\ker T$ gegeven door de 14 matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

e. Merk op dat

$$\operatorname{rank} T + \dim \ker T = \dim \operatorname{Mat}(4 \times 14, \mathbb{R}),$$

en dat $\dim \operatorname{Mat}(4 \times 14, \mathbb{R}) = 56$, en dat vanwege (d), $\dim \ker T = 14$. Dus $\operatorname{rank} T = 42$.

- **Opgave 2:** Zij $V \subset \mathbb{R}^3$ het vlak gegeven door $x_1 - x_2 + x_3 = 0$ en zij $S \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de spiegeling in V. Geef een matrix M zodat deze afbeelding overeenkomt met $x \mapsto Mx$.

Oplossing. Laat $v \in \mathbb{R}^3$ een willekeurige vector zijn. Om $S(v)$, de spiegeling van v in het vlak V, te bepalen, schrijven we $v = v_1 + v_2$ met $v_1 \in V$ en $v_2 \perp V$. Deze vectoren kunnen we bepalen door v op een normaalvector van V te projecteren. Uit de vergelijking voor V lezen we direct af dat $n = (1, -1, 1)$ zo'n normaalvector is. De projectie van v op n is $v_2 = \frac{\langle v,n \rangle}{\langle n,n \rangle} n$. Vervolgens hebben we dus $v_1 = v - v_2 = v - \frac{\langle v,n \rangle}{\langle n,n \rangle} n$. Merk op dat v_1 in V ligt, dus $S(v_1) = v_1$. Omdat v_2 loodrecht op V staat, geldt ook $S(v_2) = -v_2$. Uit lineariteit volgt dat

$$S(v) = S(v_1) + S(v_2) = v_1 - v_2 = \left(v - \frac{\langle v, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n \right) - \frac{\langle v, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n = v - 2 \frac{\langle v, n \rangle}{\langle n, n \rangle} n.$$

Om de matrix van M bij S ten opzichte van de standaardbasis (e_1, e_2, e_3) van $\mathbb{R}^3$ te vinden, berekenen we het beeld van deze standaardbasisvectoren onder S. Bovenstaande formule geeft

$$S(e_1) = (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}), \quad S(e_2) = (\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), \quad S(e_3) = (-\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}).$$

De matrix heeft M heeft als kolommen de beelden van de standaardbasisvectoren onder S. Dus

$$M = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

is de gevraagde matrix.

- **Opgave 3:** Gegeven de matrix

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 & -2 \\ -1 & 1 & 4 & -2 \\ 3 & -3 & 2 & -2 \\ 4 & -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

en de vector

$$b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Bepaal alle $x \in \mathbb{R}^4$ waarvoor geldt $Mx = b$.

Oplossing. De oplossingsverzameling verandert niet als we op de geaugmenteerde matrix

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right)$$

elementaire rijoperaties toepassen tot deze in rijtrapvorm is. Zo krijgen we

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 3 & -3 & 2 & -2 & 1 \\ 4 & -3 & -2 & 3 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & -14 & 11 & -3 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -14 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & 4 & -2 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -14 & 11 & -3 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right),$$

waarbij het duidelijk is welke rijoperaties we in elke stap hebben toegepast. Omdat de vergelijking $Mx = b$ inhomogeen is ($b \neq 0$), zoeken we eerst een enkele oplossing $v_0 = (x_1, x_2, x_3, x_4)$. Hiertoe kiezen we de coördinaat x_4, behorende bij de enige kolom zonder pivot, willekeurig, zeg $x_4 = 0$, en we vinden voor de overige coördinaten $7x_3 + 4x_4 = 2$, dus $x_3 = (2 - 4x_4)/7 = \frac{2}{7}$ en verder volgt net zo $x_2 = 1$ en $x_1 = \frac{8}{7}$, dus $v_0 = (\frac{8}{7}, 1, \frac{2}{7}, 0)$.

We weten nu dat er een oplossing is en de oplossingsverzameling is daarom gelijk aan

$$\{v_0 + z \ : \ z \in \ker M\}.$$

De rang van M is gelijk aan 3, dus de kern heeft dimensie $4 - 3 = 1$. Een basis voor de kern van M vinden we zoals we al vaak gedaan hebben. Vergeet de vijfde kolom in de gereduceerde rijtrapvorm, kies $z_4 = 1$ voor een element $z = (z_1, z_2, z_3, z_4)$ in de kern en vind de coördinaten

z_3, z_2, z_1 één voor één. We vinden $z = (-\frac{19}{7}, -3, \frac{4}{7}, 1)$. We mogen z met 7 vermenigvuldigen en vinden dat de kern wordt opgespannen door $(-19, -21, 4, 7)$. De oplossingsverzameling voor de vergelijking $Mx = b$ is dus

$$\{(\tfrac{8}{7}, 1, \tfrac{2}{7}, 0) + s(-19, -21, 4, 7) \; : \; s \in \mathbb{R}\}.$$

Opmerking. We mochten z wel schalen om noemers weg te werken, want als er geldt $z \in \ker M$, dan geldt ook $\lambda z \in \ker M$ voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$, want $\ker M$ is een lineaire deelruimte. Maar je mag **niet** de vector v_0 schalen! Er geldt $Mv_0 = b$, dus $M(7v_0) = 7b \neq b$, dus $7v_0$ is geen oplossing! We hadden wel x_4 handig kunnen kiezen om noemers te voorkomen. Met $x_4 = 3$ bijvoorbeeld, zouden we $v_0 = (-7, -8, 2, 3)$ hebben gekregen.

- **Opgave 4:** Bereken van de volgende matrices over $\mathbb{R}$ de gereduceerde rijtrapvorm (reduced row-echelon form), de rang, een basis voor de rijruimte, een basis voor de kern, en de inverse als die bestaat.

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & -2 \\ 4 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 3 \\ -3 & 4 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$$

Oplossing.

We beginnen met het vegen van de eerste matrix, om deze in gereduceerde rijtrapvorm te brengen. We passen meteen ook dezelfde rijoperaties toe op de identiteitsmatrix om de inverse te vinden, indien die bestaat.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -\frac{3}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 7 & -3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{2} & 2 & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right)$$
$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{5}{14} & -\frac{1}{14} & \frac{3}{14} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{7} & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{14} & -\frac{3}{14} & \frac{9}{14} & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 9 & 14 \end{array}\right)$$

De gereduceerde rijtrapvorm van de eerste matrix is dus de 3×3-identiteitsmatrix I_3. We zien hieraan meteen dat de matrix inverteerbaar is, met inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -5 \\ -1 & 4 & 6 \\ -3 & 9 & 14 \end{pmatrix}.$$

De rang is het aantal niet-nul rijen van de gereduceerde rijtrapvorm, dus 3. Deze niet-nul rijen $((1,0,0),(0,1,0),(0,0,1))$ vormen ook een basis voor de rijruimte (die in dit geval heel $\mathbb{R}^3$ is). Omdat de matrix inverteerbaar is, is ook de bijbehorende lineaire afbeelding inverteerbaar. In het bijzonder is die afbeelding injectief, dus de kern van de afbeelding (en van de matrix!) is de nulruimte (Lemma 8.5(3)). Deze heeft het lege rijtje als basis.

We gaan net zo te werk voor de tweede matrix.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & -2 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -6 & -2 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -13 & -2 & -7 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -3 & 2 & 6 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & 1 & 4 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & -7 & 4 & 13 & -12 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 4 & -2 & -7 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{3}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & -2 & -\frac{13}{2} & 6 \end{array}\right)$$

De gereduceerde rijtrapvorm van de tweede matrix is dus de 4×4-identiteitsmatrix I_4. We zien hieraan meteen dat de matrix inverteerbaar is, met inverse

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & -7 & 6 \\ \frac{3}{2} & -1 & -\frac{5}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ \frac{7}{2} & -2 & -\frac{13}{2} & 6 \end{pmatrix}.$$

De rang is het aantal niet-nul rijen van de gereduceerde rijtrapvorm, dus 4. Deze niet-nul rijen $((1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1))$ vormen een basis voor de rijruimte (die in dit geval heel $\mathbb{R}^4$ is). Omdat de matrix inverteerbaar is, is de kern weer de nulruimte, met het lege rijtje als basis.

De derde matrix kunnen we net zo in gereduceerde rijtrapvorm brengen. Dit keer laten we de identiteitsmatrix ernaast achterwege, omdat zal blijken dat de matrix niet inverteerbaar is. Na een aantal stappen komt de gereduceerde rijtrapvorm uit op

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De rijruimte is tijdens het vegen niet veranderd en wordt dus opgespannen door de niet-nul rijen van deze gereduceerde matrix. Omdat deze drie rijvectoren lineair onafhankelijk zijn, vormen ze een basis voor de rijruimte, die dus dimensie 3 heeft. De rang van de (oorspronkelijke) matrix is dus 3. De kern heeft daarom dimensie $4 - 3 = 1$. Een voortbrenger vinden we door de coordinaat x_4, behorende bij de enige kolom zonder pivot, vrij te kiezen, zeg $x_4 = 1$, en de overige coordinaten één voor één te bepalen. We vinden $(-1,-1,0,1)$. Deze vector vormt een basis voor de kern. Omdat de kern niet triviaal is, is de (oorspronkelijke) matrix niet inverteerbaar, wat we ook direct konden concluderen uit het feit dat de rang niet maximaal is.

De vierde matrix brengen we ook in gereduceerde rijtrapvorm. De matrix is niet vierkant, dus niet inverteerbaar, dus we laten de identiteitsmatrix weer achterwege. We krijgen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{7}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De rijruimte van de oorspronkelijke en gereduceerde matrix heeft als basis de niet-nul rijen, dus de eerste twee rijvectoren, van de gereduceerde matrix, dus $((1,1,0,\frac{1}{3},\frac{7}{3}),(0,0,1,-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}))$ is een basis en de rang is 2. De kern heeft dus dimensie $5 - 2 = 3$. Een basis voor de kern krijgen we door voor elk van de kolommen zonder pivot een vector uit de kern te bepalen met de bijbehorende coördinaat gelijk aan 1 en de coördinaten behorende bij de overige kolommen zonder pivot gelijk aan 0. We krijgen dus drie vectoren

$$(*, 0, *, 0, 1), \quad (*, 0, *, 1, 0), \quad (*, 1, *, 0, 0),$$

waarbij we de coördinaten behorend bij de kolommen met pivot één voor één bepalen door de vergelijkingen behorende bij de rijen in de matrix in gereduceerde rijtrapvorm. We krijgen

$$(-\tfrac{7}{3}, 0, \tfrac{4}{3}, 0, 1), \quad (-\tfrac{1}{3}, 0, \tfrac{1}{3}, 1, 0), \quad (-1, 1, 0, 0, 0).$$

We mogen ook elke vector met een constante vermenigvuldigen om de noemers weg te werken en vinden een basis

$$\big((-7, 0, 4, 0, 3), \quad (-1, 0, 1, 3, 0), \quad (-1, 1, 0, 0, 0)\big)$$

voor de kern van de vierde matrix.