Opgaven lineaire algebra, vrijdag 26 november, 2010

(1) Bereken de inverse van de volgende matrices

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(2) Bestaat de inverse van de matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

en zo nee, waarom niet?

(3) Zoals gezien, zeggen we dat een matrix $A \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ inverteerbaar is als er een matrix $C \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ is zodanig dat $AC = CA = I_n$. We schrijven dan $A^{-1} = C$.

Laat zien dat als $A, B \in \mathrm{Mat}(n \times n, F)$ beide inverteerbaar zijn, dan is ook AB inverteerbaar en er geldt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(4) Bereken van de volgende matrices over $\mathbb{C}$ de "reduced row-echelon form", de rang, een basis voor de rijruimte, en een basis voor de kern.

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1 & 1+i \\ 2 & 1-3i & 3-5i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(5) Hoe bereken je een basis voor de kolomruimte van een matrix?

(6) Bereken een basis voor de kolomruimte van de matrices in opgave 1 (voor een aantal hoef je hier heel weinig te rekenen!).

(7) Zij P de vectorruimte van polynomen over $\mathbb{R}$ en zij U de deelruimte opgespannen door de elementen

$$\begin{aligned} f_1 &= x^4 + \ -2x^3 + \qquad\qquad\qquad -2, \\ f_2 &= x^4 + \ -x^3 + \ -x^2 + \ 2x \ -2, \\ f_3 &= x^4 + \ -x^3 + \qquad\qquad x, \\ f_4 &= x^4 + \ -x^3 + \ x^2 + \qquad\quad 2. \end{aligned}$$

Bereken de dimensie en een basis van U.

(8) Stel M, N zijn $n \times n$ matrices waarvoor geldt $MN = I_n$. Bewijs dat ook geldt $NM = I_n$.

(9) Bereken de rang van de matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

over $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$.

(10) Bepaal de inverse van de matrices (over $\mathbb{R}$) die inverteerbaar zijn.

$$\begin{pmatrix} 0 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(11) (a) Bewijs dat voor elke twee verzamelingen $S, T \subset \mathbb{R}^n$ geldt

$$S^\perp \cap T^\perp = (S \cup T)^\perp.$$

(b) Bewijs dat voor elke twee deelruimtes $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ geldt

$$U_1 \cap U_2 = (U_1^\perp \cup U_2^\perp)^\perp.$$

(c) Bewijs dat voor elke twee deelruimtes $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^n$ geldt

$$U_1 \cap U_2 = (U_1^\perp + U_2^\perp)^\perp$$

en

$$(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp.$$

(12) We gaan de doorsnede van twee lineaire deelruimtes in $\mathbb{R}^4$ bepalen. Zij U_1 en U_2 de deelruimtes van $\mathbb{R}^4$ gegeven door

$$U_1 = L\big((1, 2, -1, 0), (-1, 1, 0, 3)\big),$$
$$U_2 = L\big((-2, 0, 2, 1), (1, 1, -2, 2)\big).$$

(a) Bereken voortbrengers van $U_1^\perp$, dus elementen $v_1, \ldots, v_r \in \mathbb{R}^4$ zodanig dat

$$U_1 = \{x \in \mathbb{R}^4 \ : \ \langle x, v_1 \rangle = \ldots = \langle x, v_r \rangle = 0\}.$$

(b) Bereken voortbrengers $w_1, \ldots, w_s \in \mathbb{R}^4$ voor $U_2^\perp$.

(c) Bepaal met behulp van de vorige opgave voortbrengers $z_1, \ldots, z_t \in \mathbb{R}^4$ voor $(U_1 \cap U_2)^\perp$.

(d) Bereken nu voortbrengers van $U_1 \cap U_2$.

Opmerking: Je kunt een lineaire deelruimte U van $\mathbb{R}^n$ geven door een stel voortbrengers te geven, of door een stel vergelijkingen te geven. Het geven van vergelijkingen is equivalent met het geven van voortbrengers van de ruimte $U^\perp$ (die je kunt berekenen als de kern van de matrix met voortbrengers voor U als rijen). De doorsnede van twee deelruimtes U_1 en U_2 wordt bepaald door vergelijkingen voor U_1 en voor U_2 samen te nemen.

Uit Propositie 12.15 van het dictaat volgt dat dit ook werkt over andere lichamen F dan $\mathbb{R}$ als we definiëren

$$U^\perp = \{x \in F^n \ : \ [x,u] = 0 \text{ voor alle } u \in U\}$$

met

$$[(x_1,\ldots,x_n),(y_1,\ldots,y_n)] = x_1y_1 + \ldots + x_ny_n.$$

Dan moet je wel oppassen, want er geldt niet noodzakelijk dat $U^\perp$ een complementaire deelruimte van U is, maar er geldt wel $U = (U^\perp)^\perp$ wegens Propositie 12.15.

(13) Bereken voortbrengers voor de doorsnede van de deelruimtes $U_1, U_2 \subset \mathbb{R}^5$ gegeven door

$$U_1 = L\big((-2,-1,-2,2,0),(2,-2,0,1,1),(-1,2,1,-2,-1)\big),$$
$$U_2 = L\big((3,-4,-1,3,2)(1,0,1,-1,0)(1,-1,-2,1,-2)\big).$$

(14) Zij F een lichaam en m een vast positief geheel getal. Zij (als in Remark 12.2 van het dictaat) E_{ij} de $m \times m$ matrix over F met een 1 op rij i en kolom j en verder overal nullen. Voor $1 \le i,j \le m$ met $i \ne j$ en $\lambda \in F$ zetten we

$$\begin{aligned} L_{ij}(\lambda) &= I_m + \lambda E_{ij} \\ M_i(\lambda) &= I_m + (\lambda - 1)E_{ii} \\ N_{ij} &= I_m + E_{ij} + E_{ji} - E_{ii} - E_{jj} \end{aligned}$$

We noemen deze matrices *elementaire matrices.*

(a) Laat zien dat als A een $m \times n$ matrix is en M een elementaire matrix, dan is $A' = MA$ een matrix die je uit A kunt verkrijgen door een elementaire rijoperatie toe te passen.
(b) Concludeer dat als twee matrices A en A' rij-equivalent zijn, dan is er een inverteerbare matrix B zodanig dat $A' = BA$.
(c) Bewijs dat een matrix A inverteerbaar is, dan en slechts dan als A te schrijven is als het product van elementaire matrices.
(d) Schrijf de volgende matrices, als dit mogelijk is, als product van elementaire matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -2 \\ 3 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

(15) Geef voor elk van de volgende stelsels vergelijkingen een matrix M en een vector b zodanig dat het stelsel equivalent is met de vergelijking $Mx = b$ in x. Geef daarna de algemene (geparametriseerde) oplossing.

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1+ & 3x_2+ & -2x_3 & = & 0 \\ 3x_1+ & 2x_2+ & 2x_3 & = & 0 \\ & -x_2+ & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 2x_1+ & 3x_2+ & -2x_3 & = & 1 \\ 3x_1+ & 2x_2+ & 2x_3 & = & -1 \\ & -x_2+ & 2x_3 & = & -1 \end{array}$$

$$
\begin{array}{rrrcl}
2x_1+ & 3x_2+ & -2x_3 & = & 1 \\
3x_1+ & 2x_2+ & 2x_3 & = & 1 \\
 & -x_2+ & 2x_3 & = & 1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rrrrcl}
3x_1+ & x_2+ & 2x_3+ & -2x_4 & = & 1 \\
2x_1+ & -x_2+ & 2x_3 & & = & 2 \\
x_1+ & & x_3 & & = & 3 \\
-2x_1+ & -x_2+ & -x_3+ & x_4 & = & 4
\end{array}
$$