Lineaire algebra I (wiskundigen)

Toets, donderdag 21 oktober, 2010

Uitwerkingen

(1) Zij V het vlak in $\mathbb{R}^3$ door de punten

$$P_1 = (1,1,0), \quad P_2 = (3,0,2) \quad \text{en} \quad P_3 = (0,2,1).$$

(a) Geef een parametrisatie voor V. Dat wil zeggen, vind vectoren p, v_1, v_2 zodanig dat geldt

$$V = \{p + sv_1 + tv_2 \ : \ s,t \in \mathbb{R}\}.$$

(b) Geef een vergelijking voor V.

Uitwerking

a) Een van de mogelijke keuzes is de parametrisatie $x = p+sv_1+tv_2$, waar $p = P_1 = (1,1,0)$, $v_1 = P_2 - P_1 = (2,-1,2)$, $v_2 = P_3 - P_1 = (-1,1,1)$. (Ter controle: Als we voor (s,t) respectievelijk $(0,0)$, $(1,0)$ en $(0,1)$ invullen, krijgen we de punten P_1, P_2 en P_3 terug.)

b) We willen een normaalvector $a = (a_1, a_2, a_3)$ op V vinden. Deze staat loodrecht op de vectoren v_1 en v_2 van onze parametrisatie. Deze vector a moet dus voldoen aan $\langle a, v_1\rangle = \langle a, v_2\rangle = 0$. Dus a moet voldoen aan de twee vergelijkingen

$$\begin{aligned} 2a_1 - a_2 + 2a_3 &= 0; \\ -a_1 + a_2 + a_3 &= 0. \end{aligned}$$

We zetten de coëfficienten van deze vergelijkingen als rijen in een matrix (waarbij we de twee vergelijkingen verwisselen), en passen Gauss-eliminatie toe om deze matrix tot rijtrapvorm te reduceren.

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Aangezien in de derde kolom geen hoofdelement (pivot) staat, kunnen we a_3 vrij kiezen. Neem $a_3 = -1$, en merk op dat de rijen van deze matrix corresponderen met de vergelijkingen $a_1 - a_2 - a_3 = 0$ en $a_2 + 4a_3 = 0$. Uit de laatste volgt dat $a_2 = 4$, en uit de eerste vergelijking volgt dan weer dat $a_1 = 3$. Dus $a = (3, 4, -1)$. Hieruit volgt dat een vergelijking voor V gegeven wordt door $\langle a, x\rangle = \langle a, p\rangle$, oftewel door $\langle a, x\rangle = 7$.

(2) Gegeven de vectoren

$$\begin{aligned} v_1 =&(2,-1,2),\\ v_2 =&(1,0,3),\\ w_1 =&(1,3,3),\\ w_2 =&(1,1,1) \end{aligned}$$

in $\mathbb{R}^3$. Zij V het vlak opgespannen door v_1 en v_2 en zij W het vlak opgespannen door w_1 en w_2, dus

$$\begin{aligned} V &= L(v_1,v_2) = \{sv_1 + tv_2 \ : \ s,t \in \mathbb{R}\},\\ W &= L(w_1,w_2) = \{sw_1 + tw_2 \ : \ s,t \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Bepaal een vector $x \neq 0$ in de doorsnede $V \cap W$.

Uitwerking

We bepalen eerst een vergelijking voor het vlak V. We zoeken dus een normaalvector a van het vlak. Deze staat loodrecht op v_1 en v_2, dus we vinden a door matrixvegen:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \end{pmatrix}$$

Uit de laatste matrix lezen we af dat $a = (3,4,-1)$ een normaalvector is. Het vlak V gaat door 0 dus $\langle a, x\rangle = 0$ is een vergelijking voor V. Hierin kunnen we een willekeurig punt $x = sw_1 + tw_2$ in W invullen, waar $s,t \in \mathbb{R}$. Dat geeft

$$0 = \langle a, sw_1 + tw_2\rangle = s\langle a, w_1\rangle + t\langle a, w_2\rangle = 12s + 6t.$$

Dus x ligt in $V \cap W$ dan en slechts dan als $t = -2s$. Bijvoorbeeld voor $s = 1$ en $t = -2$ vinden we de vector $x = (-1,1,1) \neq 0$ in $V \cap W$. (Eigenlijk hebben we zelfs laten zien dat $x = s(w_1 - 2w_2) = s(-1,1,1)$ een parametrisatie van $V \cap W$ is.) $\square$

(3) (a) Bepaal de afstand van het punt $Q = (1,2,2) \in \mathbb{R}^3$ tot het vlak gegeven door

$$2x + 2y - z = 1.$$

(b) Bepaal de hoek tussen de vectoren $(4,2,-1,-2)$ en $(2,0,2,1)$ in $\mathbb{R}^4$.

Uitwerking

(a) De vector $n = (2,2,-1)$ is een normaal van het gegeven vlak en het vlak gaat door het punt $p = (0,0,-1)$. De afstand van het punt $q = (1,2,2)$ tot het vlak is dan

$$\frac{|\langle q-p, n\rangle|}{\|n\|} = \frac{|\langle (1,2,3),(2,2,-1)\rangle|}{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}} = \frac{|2+4-3|}{3} = 1.$$

(b) Noem de vectoren v_1 en v_2. Noemen we de gevraagde hoek θ, dan geldt

$$\cos\theta = \frac{\langle v_1, v_2\rangle}{\|v_1\| \cdot \|v_2\|} = \frac{8+0-2-2}{5\cdot 3} = \frac{4}{15},$$

dus geldt $\theta = \arccos(4/15)$.

(4) Zijn de polynomen

$$f_1 = x^3 + 2x^2 + 1, \qquad f_2 = x^3 - x, \qquad f_3 = x - 1$$

lineair onafhankelijk in de vectorruimte van alle reële polynomen?

Uitwerking

Het antwoord is *ja.*

Bewijs: Zij $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ zodanig dat $\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0$. Hieruit volgt dat $(\lambda_1+\lambda_2)x^3+2\lambda_1 x^2+(-\lambda_2+\lambda_3)x-\lambda_3 = 0$. Dus $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ voldoen aan de volgende vergelijkingen:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 &= 0 \\ 2\lambda_1 &= 0 \\ -\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

Uit de tweede en vierde vergelijkingen volgt dat $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$. Uit de eerste vergelijking volgt dan dat $\lambda_2 = 0$. Dus $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$; de polynomen f_1, f_2, f_3 zijn dus lineair onafhankelijk. $\square$

(5) Zij V de vectorruimte over $\mathbb{R}$ van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Je hoeft niet te laten zien dat V inderdaad een vectorruimte is. Definieer nu $U \subset V$ als de verzameling van alle functies $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ met $f(n) = 0$ voor alle positieve gehele getallen n, dus

$$U = \{f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid \forall n \in \mathbb{Z}_{>0} : f(n) = 0\}.$$

Laat zien dat U een deelruimte is van V.

Uitwerking

We gaan de drie eigenschappen van deelruimten na. Merk op dat het nulelement $0 \in V$ de functie $f_0 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is (hier noteren we f_0 voor het nulelement om verwarring te voorkomen) die alles op $0 \in \mathbb{R}$ afbeeldt. In het bijzonder geldt $f_0(n) = 0$ voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$, dus $f_0 \in U$.

Stel dat f en g twee elementen van U zijn. Dan geldt dus voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ dat $f(n) = g(n) = 0$. In het bijzonder geldt ook

$$(f+g)(n) = f(n) + g(n) = 0 + 0 = 0$$

voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. Hieruit zien we dat $f + g$ ook een element van U is.

Stel nu dat f een element van U is en $\lambda \in \mathbb{R}$. Per aanname geldt voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ dat $f(n) = 0$. Het volgt dat ook

$$(\lambda f)(n) = \lambda \cdot f(n) = \lambda \cdot 0 = 0$$

voor alle $n \in \mathbb{Z}_{>0}$. We concluderen dat λf ook een element van U is. We hebben hiermee bewezen dat U voldoet aan de drie eigenschappen van een deelruimte, dus U is een deelruimte van V. $\square$

Alternatieve oplossing. Laat voor $n \in \mathbb{Z}_{>0}$ de deelverzameling $U_n \subset V$ bestaan uit alle functies $f \in V$ waarvoor $f(n) = 0$. We hebben al in een bonusopgave bewezen dat elke U_n een deelruimte van V is. Maar U is gelijk aan de doorsnede $\bigcap_{n\in\mathbb{Z}_{>0}} U_n$, en de doorsnede van deelruimten is weer een deelruimte. We concluderen dat U een deelruimte van V is. $\square$

(6) Laat U_1 en U_2 deelruimtes zijn van een vectorruimte V. Bewijs dat de vereniging $U_1 \cup U_2$ een deelruimte van V is dan en slechts dan als geldt $U_1 \subset U_2$ of $U_2 \subset U_1$.

Uitwerking

We bewijzen eerst “als”. Stel er geldt $U_1 \subset U_2$. Dan geldt $U_1 \cup U_2 = U_2$. Omdat U_2 per aanname een deelruimte is, is de vereniging $U_1 \cup U_2$ het ook. Analoog, als er geldt $U_2 \subset U_1$, dan geldt $U_1 \cup U_2 = U_1$, dus de vereniging is wederom een deelruimte.

Nu “slechts dan als”. Stel er geldt $U_1 \not\subset U_2$ en $U_2 \not\subset U_1$. Dan bestaan er elementen $x \in U_1 \setminus U_2$ en $y \in U_2 \setminus U_1$. Definieer $z = x + y$. We laten zien dat $z \notin U_1 \cup U_2$. Stel namelijk $z \in U_1$. Dan volgt wegens $x \in U_1$ en het feit dat U_1 een deelruimte is, ook $y = z - x \in U_1$, tegenspraak. Stel $z \in U_2$. Dan volgt wegens $y \in U_2$ en het feit dat U_2 een deelruimte is, ook $x = z - y \in U_2$, tegenspraak. Dus geldt inderdaad $z \notin U_1 \cup U_2$. Omdat er wel geldt $x, y \in U_1 \cup U_2$, voldoet $U_1 \cup U_2$ niet aan de tweede eis voor deelruimten, dus $U_1 \cup U_2$ is geen deelruimte.